Geometría

1) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+$

$+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}+2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Sustituyendo:

$9+1+16+2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0 \Rightarrow 26=-2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-13}$

---

2) a) Si $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$, los vectores pueden ser coplanarios, o uno de ellos perpendicular a los otros dos (sin ser cero ninguno de ellos)

b) Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$ es FALSO, basta con que uno de ellos sea perpendicular a la diferencia de los otros dos.

Ejemplo.- Consideremos los vectores $\vec{a}(3,-1,1), \vec{b}(1,-1,0)$ y $\vec{c}(2,3,1)$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(3,-1,1)\cdot(1,-1,0)=3+1=4\\ \vec{a}\cdot\vec{c}&=(3,-1,1)\cdot(2,3,1)=6-3+1=4\end{aligned}$$ y claramente, $\vec{b}\neq\vec{c}$

---

3) Sea P el punto medio de AC y Q el de AB

- Tomamos el triángulo **AOP** $\dfrac{sen(A/2)}{OP}=\dfrac{sen\,45^o}{AP}=$ como P el punto medio de AC $=\dfrac{sen\,45^o}{AC/2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{sen\,(A/2)}{OP}=\frac{\sqrt{2}/2}{AC/2}\Rightarrow\frac{sen\,(A/2)}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{AC}\Rightarrow\frac{OP\cdot\sqrt{2}}{AC}=sen\,(A/2)\Rightarrow\frac{OP}{AC}=\frac{sen\,(A/2)}{\sqrt{2}} \quad \textbf{(1)}$$

- Tomamos el triángulo **OAC** $\dfrac{A}{2}+45^o+90^o+\alpha=180^o\Rightarrow\alpha+\dfrac{A}{2}=45^o\Rightarrow\alpha=45^o-\dfrac{A}{2}$ **(2)**

- Tomamos el triángulo **OPC** $sen\,\alpha=\dfrac{OP}{PC}=\dfrac{OP}{AC/2}\Rightarrow$ por **(2)** $\Rightarrow sen\left(45^o-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{2\cdot OP}{AC}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{OP}{AC}=\frac{sen\left(45^o-\frac{A}{2}\right)}{2} \quad \textbf{(3)}$$

Igualando las expresiones **(1)** y **(3)**: $\dfrac{sen(A/2)}{\sqrt{2}}=\dfrac{sen\left(45^o-\frac{A}{2}\right)}{2}\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot sen(A/2)=sen\left(45^o-\dfrac{A}{2}\right)\Rightarrow$

Desarrollando, $\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot sen(A/2)=sen\,45^o\cdot\cos(A/2)-\cos 45^o\cdot sen\,(A/2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{A}{2}-sen\dfrac{A}{2}\right)$

Es decir, $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot sen(A/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - sen\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot sen(A/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - sen\frac{A}{2}\right)$, simplificando,

$$2\,sen\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2} - sen\frac{A}{2} \Rightarrow 3\,sen\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2} \Rightarrow tg\frac{A}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\cos A = 9(1-\cos A) \Rightarrow 10\cos A = 8 \Rightarrow 5\cos A = 4 \Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{4}{5}}$$

---

4) Consideremos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Se tiene:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Además $(\vec{a} - \vec{b}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = F_2 + F_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = F_3 - F_2 = 2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

---

5) a) Falso.- En un plano como mucho existen 2 vectores linealmente independientes

b) Cierto.- Condición necesaria y suficiente de rectas coplanarias.

---

6) Recta AA' .- Pto (2,4,5) ; $\vec{v}_A = (1,2,2)$

Recta BB' .- Pto (3,0,4) ; $\vec{v}_B = (1,1,0)$

a) Posición relativa Formamos el vector $P_{AA'}P_{BB'} = (1,-4,-1)$

Formamos matrices y estudiamos rangos:

$$rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) = F_3 - 2F_2 = rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$rang(M) = 2$, $rang(M^*) = 3$, con lo que las rectas se cruzan

b) $\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1) \Rightarrow |\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B| = \sqrt{4+4+1} = 3$;

$$[P_{AA'}P_{BB'}, \vec{v}_A, \vec{v}_B] = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \quad ; \quad d = \frac{|[P_{AA'}P_{BB'}, \vec{v}_A, \vec{v}_B]|}{|\vec{v}_A \wedge \vec{v}_B|} = \frac{|-9|}{3} \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

---

7) Sea r la recta de dirección de los rayos del Sol, $\left.\begin{array}{r}\vec{v}_r=(-5,-1)\\ A(1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y}{-1}\Rightarrow r:1-x=-5y\Rightarrow$

$\Rightarrow r:x-5y-1=0$

Sea r_{AB} la recta que pasa por A y B, $\left.\begin{array}{r}\vec{v}_{AB}=(-1,3)\\ A(1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}\Rightarrow r_{AB}:3x-3=-y\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r}\vec{v}_{AB}=(-1,3)\\ A(1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}\Rightarrow r_{AB}:3x-3=-y\Rightarrow r_{AB}:3x+y-3=0$

Sea **s** la bisectriz de las rectas r y r_{AB} ; $\dfrac{|x-5y-1|}{\sqrt{1+25}}=\dfrac{|3x+y-3|}{\sqrt{9+1}}\Rightarrow\dfrac{x-5y+1}{\sqrt{26}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x+y-3)$

Nos interesa la recta de pendiente positiva, es decir:

$\dfrac{x-5y+1}{\sqrt{26}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot(3x+y-3)\Rightarrow\sqrt{10}\cdot(x-5y+1)=-\sqrt{26}\cdot(3x+y-3)\Rightarrow$ Operando,

$$s:(3\sqrt{26}+\sqrt{10})x-(5\sqrt{10}-\sqrt{26})y-\sqrt{10}+3\sqrt{26}=0$$

La recta buscada es la perpendicular a la anterior que pasa por el punto A

Con pendientes, $m_s=-\left(\dfrac{3\sqrt{26}+\sqrt{10}}{5\sqrt{10}-\sqrt{26}}\right)\Rightarrow m_t=-\left(\dfrac{5\sqrt{10}-\sqrt{26}}{3\sqrt{26}+\sqrt{10}}\right)$

Así la recta pedida será $\boxed{y=-\left(\dfrac{5\sqrt{10}-\sqrt{26}}{3\sqrt{26}+\sqrt{10}}\right)(x-1)}$

---

8) $\vec{a}=(1,1,3)$, $\vec{b}=(-1,2,0)$, $\vec{c}=(1,3,5)$

a) Calculamos $\begin{vmatrix}1&1&3\\-1&2&0\\1&3&5\end{vmatrix}=0$, luego sí son linealmente independientes

b) Punto $Q(-1,0,1)$, vectores $\vec{b}=(-1,2,0)$, $\vec{c}=(1,3,5)$

Ecuación del plano, $\pi:\begin{vmatrix}x+1&-1&1\\y&2&3\\z-1&0&5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\pi:2x+y-z+3=0}$

---

9) Sea el $\vec{u}=(a,b,c)$ el vector pedido unitario pedido

Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(a,b,c)\cdot(1,0,1)=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a$

Por otra parte ang ($\vec{u},\vec{w}$) = 60º . Como $\cos(\vec{u},\vec{w})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b+\dfrac{c}{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}}\Rightarrow$

$1=\dfrac{a+b\sqrt{2}+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow$ como $\vec{u}$ es unitario, $1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, luego, $a+b\sqrt{2}+c=1$

Así tenemos el sistema, $\begin{cases} a+c=0 \\ a+b\sqrt{2}+c=1 \end{cases}$; resolviendo, $b\sqrt{2}=1\Rightarrow b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como $1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, sustituyendo los valores de c y b, $2a^2+\dfrac{2}{4}=1\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a=\pm\dfrac{1}{2}$

Los vectores serán, $\boxed{\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)}$; $\boxed{\vec{u}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)}$

---

10) Sea la recta $r:\begin{cases} 1+x=y \\ z=1+2x \end{cases}$; un vector director $\vec{v}_r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,2)$

Así r en forma paramétrica será: $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$; con lo que un punto genérico de la recta será de la forma $A(\lambda,1+\lambda,1+2\lambda)$

a) Sean los puntos $B(1,0,1)$ y $C(0,0,0)$,

$d(A,B)=2\cdot d(A,C)\Rightarrow\sqrt{(1-\lambda)^2+(1+\lambda)^2+4\lambda^2}=2\cdot\sqrt{\lambda^2+(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2}$, elevando al cuadrado

$(1-\lambda)^2+(1+\lambda)^2+4\lambda^2=4\cdot(\lambda^2+(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2)$, operando $3\lambda^2+4\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=\left\langle \begin{matrix} -1 \\ -1/3 \end{matrix}\right.$, con lo que $A(-1,0,-1)$ ó $A(-1/3,2/3,1/3)$ (no vale pues no está por debajo del plano *XY*)

Luego $\boxed{A(-1,0,-1)}$

b) $P=r\cap YZ$, como $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$, haciendo $x=0$, se obtiene $P(0,1,1)$. Así $\vec{BP}=(-1,1,0)$ con lo que

la recta $r_{BP}:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}=\begin{cases} x=-\mu \\ y=1+\mu \\ z=1 \end{cases}$ **(*)**

Consideremos el plano π perpendicular a r_{BP} que pasa por $C(0,0,0)$, $\pi:-x+y+D=0$, como pasa por C, $\pi:-x+y=0\Rightarrow\pi:x-y=0$

Si R es la proyección ortogonal de C, $R=r_{BP}\cap\pi$ (según (*)) $\Rightarrow-\mu-1-\mu=0\Rightarrow-2\mu=1\Rightarrow\mu=-\dfrac{1}{2}$

Así $\boxed{R=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)}$

---

11) Consideremos los planos, $\begin{cases} x+y+\lambda z=1 \\ 2x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$, con matrices, $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Discutimos el sistema según el parámetro λ, para ello formamos el determinante de la matriz M,

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda^3+3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=1;\lambda=-2$$

<u>Caso 1</u>.- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$, $rang(M)=rang(M^*)=3$, <u>se cortan en un punto</u>

<u>Caso 2</u>.- Si $\lambda=1$; $rang(M)=rang(M^*)=2$, <u>se cortan en una recta</u>

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=F_3-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Caso 3</u>.- .- Si $\lambda=-2$; $rang(M)=2 \neq rang(M^*)=3$, <u>se cortan dos a dos</u>

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3+2F_1 \end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right)=F_3/3=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$=F_2+4F_3=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

---

12) Sean $\pi_1: 3x-4y+5=0$, $\pi_2: 2x-2y+z+9=0$.

a) Consideremos un punto $P(x,y,z)$ cualquiera. Se tiene $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$, entonces:

$$\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|2x-2y+z+9|}{\sqrt{4+4+1}} \Rightarrow 3\cdot|3x-4y+5|=5\cdot|2x-2y+z+9| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(3x-4y+5)=\pm 5\cdot(2x-2y+z+9) \text{ (*)}$$

Existen dos soluciones: $\boxed{\begin{cases} x+2y+5z+30=0 \\ 19x-22y+5z+60=0 \end{cases}}$ (Dos planos)

b) Si $Q\in OY \Rightarrow Q(0,y,0)$, sustituyendo en **(*)**, $3\cdot(-4y+5)=\pm 5\cdot(-2y+9)$, también dos soluciones:

$$\begin{cases} -12y+15=-10y+45 \Rightarrow y=-15 \\ -12y+15=10y-45 \Rightarrow -22y=-60 \Rightarrow y=30/11 \end{cases}$$

Luego dos puntos $\boxed{Q(0,-15,0)}$ y $\boxed{Q\left(0,\frac{30}{11},0\right)}$

---

13) $A(1,-3,1)$, $B(2,3,1)$ y $C(1,3,-1)$

a) Plano por los tres puntos. Construimos dos vectores : $\vec{AB}=(1,6,0)$, $\vec{AC}=(0,6,-2)$

Ecuación del plano: $\pi:\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y+3 & 6 & 6 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 6x-y-3z-6=0}$

b) $d(O,\pi)=\dfrac{|-6|}{\sqrt{36+1+9}}=\dfrac{6}{\sqrt{46}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{46}}{46}=\boxed{\dfrac{3\cdot\sqrt{46}}{23}}$

c) $V=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\left[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}\right]\right|=\dfrac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{6}\cdot|-12|=\boxed{6}$

---

14) Consideremos la recta $r:\dfrac{x-12}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z-6}{3}$, en paramétricas, $r:\begin{cases} x=12+\lambda \\ y=-6+2\lambda \\ z=6+3\lambda \end{cases}$

- $A\in r\cap\{x=0\}\Rightarrow 12+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-12\Rightarrow A(0,-30,-30)$
- $B\in r\cap\{y=0\}\Rightarrow 2\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=3\Rightarrow B(15,0,15)$
- $C\in r\cap\{z=0\}\Rightarrow 6+3\lambda=0\Rightarrow\lambda=-2\Rightarrow C(10,-10,0)$

a) Comparamos módulos de vectores

$\vec{AB}=(15,30,45)\Rightarrow\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{2340}$

$\vec{AC}=(10,20,30)\Rightarrow\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{1400}$

$\vec{BC}=(-5,-10,-15)\Rightarrow\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{350}$

Con lo que **C está entre A y B**

b) $S(DAB)=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d(D,r_{AB})$, $S(DAC)=\dfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot d(D,r_{AC})$, $S(DBC)=\dfrac{1}{2}\cdot|DC|\cdot d(D,r_{BC})$

Pero A, B y C están en la misma recta r, luego $d(D,r_{AB})=d(D,r_{AC})=d(D,r_{BC})$

Así el **mayor área será la del triángulo DAB**

---

15) a) $\vec{v}_r=(-1,-1,2)$, $\vec{n}(2,-3,1)$. $sen(r,\pi)=\dfrac{\vec{v}_r\cdot\vec{n}}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-2+3+2}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}\Rightarrow\boxed{sen(r,\pi)=\dfrac{\sqrt{21}}{14}}$

b) Proyección ortogonal de r sobre π

$r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$, un punto cualquiera de ella será $P(-1-\lambda,-\lambda,2\lambda)$.

Calculamos $P = r \cap \pi \Rightarrow 2(-1-\lambda) - 3(-\lambda) + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1/3$, así $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Sea $Q(-1,0,0) \in r$ otro punto de la recta, calcularemos su proyección ortogonal sobre π

Construimos recta $s \perp \pi$, con $Q(-1,0,0) \in s$. Como $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$, $\vec{v}_s = (2,-3,1)$; así en

Paramétricas $s: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Si Q' es la proyección de Q sobre π, $Q' = s \cap \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(-1+2\lambda) - 3(-3\lambda) + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1/14 \Rightarrow Q'\left(-\frac{12}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$

Si r' es la recta proyección ortogonal, será la que pase por P y Q', o sea $\vec{v}_{r'} = \overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{20}{42}, \frac{5}{42}, -\frac{25}{42}\right)$,

Simplificando, $\vec{v}_{r'} = (20,5,-25) = (4,1,-5)$. Así $\boxed{r': \frac{x + \frac{4}{3}}{4} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-5}}$

---

16) Sea $\vec{x} = (a,b,c)$; Si $\vec{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5) \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b-c, 2c+a, a-2b) = (1,3,5) \Rightarrow \begin{cases} -b-c = 1 \\ 2c + a = 3 \\ a - 2b = 5 \end{cases}$

Resolviendo $\begin{cases} b = -1 - c \\ a = 3 - 2c \end{cases}$. Como $|\vec{x}| = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$, sustituyendo,

$(3-2c)^2 + (-1-c)^2 + c^2 = 6 \Rightarrow 3c^2 - 5c + 2 = 0 \Rightarrow c = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 2/3 \end{matrix} \right.$; dos soluciones:

$\boxed{\vec{x} = (1,-2,1)}$ ó $\boxed{\vec{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

---

17) Sean $P(8,13,8)$, $Q(-4,-11,-8)$

a) Si M es el punto medio de PQ, $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{13-11}{2}, \frac{8-8}{2}\right) = (2,1,0)$

El vector $\overrightarrow{PQ}(-12,-24,-16) = (3,6,4)$, luego $\pi: 3x + 6y + 4z + D = 0$, como $M \in \pi$, $6 + 6 + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = -12$, así $\boxed{\pi: 3x + 6y + 4z - 12 = 0}$

b) <u>Proyección de O sobre π</u>

Construimos recta r perpendicular a π que pasa por O(0,0,0), $\vec{v}_r = \vec{n} = (3,6,4) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$

Si O' es la proyección de O sobre π, $O' = r \cap \pi \Rightarrow 9\lambda + 36\lambda + 16\lambda - 12 = 0 \Rightarrow 61\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 12/61$

Con lo que $\boxed{O' = \left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)}$

c) $\pi \cap OX \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4,0,0)$

$\pi \cap OY \Rightarrow 6y - 12 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0,2,0)$

$\pi \cap OX \Rightarrow 4z - 12 = 0 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow C(0,0,3)$; $V = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |24| = \boxed{4}$

---

18) $A(1,\lambda,0)$, $B(1,1,\lambda-2)$, $C(1,-1,\lambda)$

a) Estarán alineados si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = (-2,0,0) \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in R$, luego <u>no alineados</u>

b) Area $(A,B,C) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1}$

---

19) $r: \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$; $\pi: 2x - y + kz = 0$

a) Si r es perpendicular $\pi \Rightarrow \vec{v}_r$ es paralelo a $\vec{n}_\pi \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{k} \Rightarrow \boxed{m = -8}$; $\boxed{k = -\frac{1}{2}}$

b) Si r está contenida en $\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow 2m - 4 + 2k = 0 \Rightarrow m - 2 + k = 0$ (*)

Como $P(1,0,1) \in r \Rightarrow$ pertenece a π , luego $2 + k = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$

Volviendo a la expresión (*), $m - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}$

---

20) Sea el plano $\pi: x + y + z = 1$; la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y el punto P(1,1,0)

a) Sea el plano α perpendicular a $r \Rightarrow \alpha: y + z + K = 0$, si $P(1,1,0) \in \pi \Rightarrow 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1$

Luego $\Rightarrow \alpha: y + z - 1 = 0$; Sea $Q = r \cap \alpha \Rightarrow \Rightarrow \lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$.

Sustituyendo en r: $Q = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Así la recta s pedida es la que pasa por P y Q

$\vec{v}_s = \overrightarrow{QP} = (0,1/2,-1/2) = (0,1,-1)$; luego $\boxed{s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}}$

b) Sea P'(a,b,c) simétrico de P respecto de r

Construimos plano α perpendicular a r , que pase por P (Tomamos el mismo que en a))

$\alpha: y+z-1=0$. Hallamos $Q=r\cap\alpha \Rightarrow$ (de nuevo por a) $Q=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Imponemos que Q sea el punto medio de PP':

$$\begin{cases} 1=\dfrac{a+1}{2}\Rightarrow a+1=2\Rightarrow a=1 \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{b+1}{2}\Rightarrow b=0 \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{2}\Rightarrow c=1 \end{cases} \quad \text{luego, } \boxed{P'(1,0,1)}$$

c) Sea P''(a,b,c) simétrico de P respecto de $\pi: x+y+z=1$

Construimos recta t perpendicular a π, $\vec{v}_t=(1,1,1)$, como $P\in t$, $t:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Si $M=\pi\cap t\Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+\lambda=1\Rightarrow 3\lambda=-1\Rightarrow \lambda=-1/3$, luego $M=\left(\frac{2}{3},\frac{3}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Imponemos que M sea el punto medio de PP':

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}=\dfrac{a+1}{2}\Rightarrow a=1/3 \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{b+1}{2}\Rightarrow b=1/3 \\ -\dfrac{1}{3}=\dfrac{c}{2}\Rightarrow c=-2/3 \end{cases} \quad \text{luego, } \boxed{P''\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)}$$

---

21) Sean las rectas $r: x-2=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z+1}{-2}$; $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

a) Vectores directores de ambas rectas $\vec{v}_r(1,k,-2)$; $\vec{v}_s(1,-1,2)$

Puntos de las rectas, $P_r(2,1,-1)$; $P_s(1,2,0)$, luego $\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,1,1)$

Para que las rectas sean coplanarias, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -3-3k=0\Rightarrow \boxed{k=-1}$

b) Si $k=-1$, las rectas son coplanarias, como no son paralelas, se cortarán en un punto

plano que las contiene, $\pi:\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z+1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{x+y-3=0}$

c) Sabemos que si $k=-1$ las rectas se cortan. Calculemos su punto de corte:

Expresamos rectas en paramétricas:

$r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2-\mu \\ z=2\mu \end{cases}$ Igualando expresiones: $\left.\begin{array}{l} x=2+\lambda=1+\mu \\ y=1-\lambda=2-\mu \\ z=-1-2\lambda=2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=-3/4;\ \mu=1/4$

Punto de corte: $P\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Si ***t*** es la recta pedida, $t\perp r$, $t\perp s$, con lo que $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(1,1,0)$

Con lo que $\boxed{t:\dfrac{x-\frac{5}{4}}{1}=\dfrac{y-\frac{7}{4}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{0}}$

---

22) Sean A, B, C tres puntos del espacio, con $CB=-3CA$

a) Como $CB=CA+AB=-3CA\Rightarrow AB=-4CA=4AC\Rightarrow CB=4AC\Rightarrow AC=\frac{1}{4}CB$, luego $\boxed{k=\frac{1}{4}}$

b) Si $A(1,2,-1)$, $B(3,6,9)$; tomando $C(x,y,z)$, si $CB=-3CA\Rightarrow$

$(3-x,6-y,9-z)=-3\cdot(1-x,2-y,-1-z)\Rightarrow(3-x,6-y,9-z)=(3x-3,-6+3y,3+3z)$

Igualando componentes, $x=2/3,\ y=3,\ z=3/2$, $\boxed{C=\left(\frac{2}{3},3,\frac{3}{2}\right)}$

---

23) Tetraedro de vértices $A(1.0.0), B(1,1,1), C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$

a) $S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot|AB\wedge AC|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|(-1,-3,3)|=\boxed{\frac{\sqrt{19}}{2}}$

$$V(ABCD)=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|=F_i-F_1=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|=\boxed{\frac{7}{6}}$$

b) Hallamos plano determinado por A, B y C

$\vec{AB}=(0,1,1)$, $\vec{AC}=(-3,1,0)$, entonces $\pi:\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\pi:x+3y-3z-1=0}$

$d(D,\pi)=\dfrac{|3-9-1|}{\sqrt{1+9+9}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{19}}{7}}$

c) Consideremos las rectas $R_{AC}:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$; $R_{BD}:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$

Estudiamos su posición relativa: $rang\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = F_3 + 2F_2 = rang\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$

$rang(M) = 2 \neq rang(M^*) = 3$, las <u>rectas se cruzan</u>

$$D(R_{AC}, R_{BD}) = \frac{\left|[AB, AC, BD]\right|}{|AC \wedge BD|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \boxed{\frac{7\sqrt{41}}{41}}$$

$$\left|[AB, AC, BD]\right| = \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix} = 7 \ ; \ AC \wedge BD = \begin{vmatrix}i & j & k\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix} = (2,-6,1)$$

---

24) Sea la recta $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y - z = 2$

Sea π' con $\begin{cases} r \subset \pi' \Rightarrow \vec{v}_r \in \pi' \\ \pi \perp \pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi \in \pi' \end{cases}$ Como además $r \subset \pi' \Rightarrow$ P(1,-1,0) $\in \pi'$. Luego el plano será:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y + z - 2 = 0}$$

---

25) a) Sabemos que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto

medio, O, así O = pto medio AC = $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1,2,2)$

O = pto medio BD = si D(x,y,z) $\Rightarrow (1,2,2) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+2}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 = (x+1)/2 \\ 2 = (y+2)/2 \\ 2 = (z+2)/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{D(0,2,2)}$$

$$S(ABCD) = |AD \wedge AB| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = |(0,2,-2)| = \sqrt{4+4} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

b) Construimos vectores lados, $AB = (1,1,1), BC = (-1,1,1), CD = (-1,-1,-1), AD = (-1,1,1)$

Calculando módulos, $|AB| = |BC| = |AD| = |CD| = \sqrt{3}$

Ahora bien, $AB \cdot AD = (1,1,1) \cdot (-1,1,1) = 1 \neq 0$, luego no son perpendiculares, se trata de un $\boxed{rombo}$

---

26) Sean las rectas, $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

a) Al estudiar su posición relativa se comprueba que se cruzan.

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[A_rA_s,\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s\right|}=\frac{35}{\sqrt{98}}=\frac{35}{7\sqrt{2}}=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

Sabemos que $\left\{\begin{matrix}\vec{v}_r(1,-2,2)\\ A_r(0,1,3)\\ \vec{v}_s(3,1,-1)\\ A_s(2,0,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow A_rA_s=(2,-1,4)$

$$\left|\left[AA,\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}=35\ ;\ \vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}=(0,7,7)$$

b) Sea **t** la recta perpendicular a ambas

Calculamos: $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=(0,7,7)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y al vector** $\vec{v}_t$ $\pi:\begin{vmatrix}x&1&0\\y-1&-2&7\\z-3&2&7\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha:4x+y-z+2=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_t$ $\pi:\begin{vmatrix}x-2&3&0\\y&1&7\\z-1&-1&7\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\beta:2x-3y+3z-7=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases}4x+y-z+2=0\\2x-3y+3z-7=0\end{cases}}$

c) Sea **t** la recta que corta a ambas y pasa por P(1,0,0)

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y pasa por P:** $\alpha:\begin{vmatrix}x-1&1&-1\\y&-2&1\\z&2&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha:8x+5y+z-8=0}$

Si $A_r=(0,1,3)$, $P(1,0,0)\Rightarrow PA_r=(-1,1,3)$

Plano β **que contiene a la recta s y pasa por P:** $\beta:\begin{vmatrix}x-1&3&1\\y&1&0\\z&-1&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\beta:x-2y+z-1=0}$

Si $A_s=(2,0,-1)$, $P(1,0,0)\Rightarrow PA_s=(1,0,-1)$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases}8x+5y+z-8=0\\x-2y+z-1=0\end{cases}}$

27) a) Para que contengan una recta en común el sistema $\begin{cases} x+y+az=-2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=3 \end{cases}$ tiene que ser compatible indeterminado. Es decir, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a^3+3a-2=0 \Rightarrow a=-2\,;\, a=1$

Caso 1.- Si $a=1\,;\, rang(M)=1 \neq rang(M^*)=2$, Sª Incompatible

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) = F_3-5F_2 = rang = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Caso 2.- Si $a=-2\,;\, rang(M)=2=rang(M^*)$, Sª Compatible Indeterminado

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \end{array} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) = F_3+F_2 = rang = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego $\boxed{a=-2}$

b) Si $a=-2$, la recta común será $\boxed{t:\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ -3y+3z-1=0 \end{cases}}$ (ver apartado anterior)

---

28) Sean las rectas, $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$; $s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

a) Al estudiar su posición relativa se comprueba que se cruzan.

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[A_rA_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s\right|} = \frac{22}{\sqrt{26}} = \frac{22\sqrt{26}}{26} = \boxed{\frac{11\sqrt{26}}{13}}$$

Sabemos que $\left\{\begin{array}{c} \vec{v}_r(3,-2,1) \\ A_r(2,1,0) \\ \vec{v}_s(2,-1,2) \\ A_s(-1,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow A_rA_s = (-3,-3,1)$

$$\left|\left[AA, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right| = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 22 \ ; \ \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3,-4,1)$$

b) Perpendicular común

Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-3,-4,1)$

Construimos dos planos:

Plano α que contiene a la recta r y al vector $\vec{v}_t$ $\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -3 \\ y-1 & -2 & -4 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: x-3y-9z+1=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_t$ $\beta:\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -3 \\ y+2 & -1 & -4 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\beta: 7x-8y-11z-12=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases} x-3y'-9z+1=0 \\ 7x-8y-11z-12=0 \end{cases}}$

---

29) $\pi: x+3y-z-1=0$; $r: \dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$

a) Sea π' con $\begin{cases} r\subset\pi' \Rightarrow \vec{v}_r \in \pi' \\ \pi\perp\pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi \in \pi' \end{cases}$ Como además $r\subset\pi' \Rightarrow$ P(-2,1,0) $\in \pi'$. Luego el plano será:

$$\pi': \begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi': 5x-7y-16z+17=0}$$

b) Sea $s=\pi\cap\pi': \begin{cases} x+3y-z-1=0 \\ 5x-7y-16z+17=0 \end{cases}$ .Calculamos su vector director $\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & -16 \end{vmatrix}=(5,-1,2)$

Hallamos un punto de s, sea $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow$ P(-2,1,0)

Las ecuaciones paramétricas de s serán $\boxed{s:\begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}}$

---

30) Sea π' el plano pedido, $\left\{\begin{matrix} A,B\in\pi' \Rightarrow \overrightarrow{AB}\in\pi' \\ \pi'\perp\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi \in\pi' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & -2 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi': 2x+y-2=0}$

---

31) Sean las rectas $r: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-k}{1}$; $s:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$; $\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,3)$

a) Calculamos $\left\{\begin{matrix} \vec{v}_r(-1,1,1) \\ A_r(1,-1,k) \\ \vec{v}_s(-1,2,3) \\ A_s(0,-2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_rA_s=(-1,-1,1-k)$;

Si r y s son coplanarias $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{k=4}$

b) Sea $k=4$, y π el plano que las contiene $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z-4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-z+5=0}$

---

32) $\pi: x+y+z=0$; $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$

a) Sea $Q = r \cap \pi$; Si Q es un punto genérico de r , $Q(1+\lambda, 2\lambda, -1+2\lambda)$ sustituyendo en el plano

$1+\lambda+2\lambda-1+2\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, luego $\boxed{Q(1,0,-1)}$

b) Sea π' paralelo a $\pi \Rightarrow \pi': x+y+z+K=0$ **(*)**

Por otra parte sea $Q' = r \cap \pi' \Rightarrow 1+\lambda+2\lambda-1+2\lambda+K=0 \Rightarrow 5\lambda = -K \Rightarrow \lambda = -\frac{K}{5}$, con lo que

$Q'\left(1-\frac{K}{5}, -\frac{2K}{5}, -1-\frac{2K}{5}\right)$.

Por último, $d(Q,Q') = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1-\frac{K}{5}-1\right)^2 + \left(-\frac{2K}{5}\right)^2 + \left(-1+\frac{2K}{5}+1\right)^2} = 2$, operando,

$$\sqrt{\left(\frac{K}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2K}{5}\right)^2 + \left(\frac{2K}{5}\right)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K^2}{25} + \frac{4K^2}{25} + \frac{4K^2}{25}} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{9K^2}{25}} = 2 \Rightarrow \frac{3K}{5} = 2 \Rightarrow K = \frac{10}{3}$$

Sustituyendo en (*), $\Rightarrow \pi': x+y+z+\frac{10}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x+3y+3z+10=0}$

---

33) Sean $r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$ y los planos $\pi_1 : 2-3x+2y-z=0$, $\pi_2 : 3+2x+2y-2z=0$

a) Posición de r y π_1: $2-3(2-3\lambda)+2(1+2\lambda)-(4-\lambda)=0 \Rightarrow 14\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3/7$ (solución única)

Se cortan en un punto

Posición de r y π_2: $3+2(2-3\lambda)+2(1+2\lambda)-2(4-\lambda)=0 \Rightarrow 1=0$ (incompatible)

Son paralelos

b) Posición de π_1 y π_2: Observando sus ecuaciones, no son paralelos, ni coincidentes, luego **se cortan en una recta**

c) $d(r,\pi_2) = d(P,\pi_2)$ con P un punto cualquiera de r . Sea dicho punto P(2,1,4)

$$d(P,\pi_2) = \frac{|3+4+2-8|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

---

34) a) Formamos las matrices correspondientes: $M=\begin{pmatrix}2&3&k\\1&k&-1\\3&1&-3\end{pmatrix}$; $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&k&3\\1&k&-1&-1\\3&1&-3&-k\end{array}\right)$

$$|M|=\begin{vmatrix}2&3&k\\1&k&-1\\3&1&-3\end{vmatrix}=2-5k-3k^2=0\Rightarrow k=\left\langle\begin{array}{l}-2\\1/3\end{array}\right.$$

- Caso 1.- Si $k\neq-2$; $k\neq1/3\Rightarrow rang(M)=rang(M^*)=3$, **se cortan en un punto**
- Caso 2. Si $k=-2$, sustituyendo, $rang(M)=rang(M^*)=2$

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-2&3\\1&-2&-1&-1\\3&1&-3&2\end{array}\right)=F_1\leftrightarrow F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\2&3&-2&3\\3&1&-3&2\end{array}\right)=\begin{array}{c}F_2-2F_1\\F_3-3F_1\end{array}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&7&0&5\\0&7&0&5\end{array}\right)=$$

$$=F_3-F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&7&0&5\\0&0&0&0\end{array}\right)$$ **se cortan en una recta**

- Caso 3. Si $k=1/3$, sustituyendo, $rang(M)=2\neq rang(M^*)=3$

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1/3&3\\1&1/3&-1&-1\\3&1&-3&-1/3\end{array}\right)=3F_i=rang\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&1&9\\3&1&-3&-3\\9&3&-9&-1\end{array}\right)=F_3-3F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&1&9\\3&1&-3&-3\\0&0&0&8\end{array}\right)$$

El plano π_2 y π_3 son paralelos y π_1 corta a ambos

b) Se cortan en una recta para $k=-2$, dicha recta es: $t:\begin{cases}x-2y-z=1\\7y=5\end{cases}$. Un vector director de dicha recta es $\vec{v}_t=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-2&-1\\0&7&0\end{vmatrix}=\boxed{(1,0,1)}$

---

35) Sea el plano $\pi: x+2y+3z=6$

a) Sea $O'(a,b,c)$ simétrico de O(0,0,0) respecto de π

Hallamos una recta $r\perp\pi$, que pase por O, $r:\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=6\lambda\end{cases}$. Sea $M=r\cap\pi$, sustituyendo

$\lambda+4\lambda+9\lambda=6\Rightarrow14\lambda=6\Rightarrow\lambda=6/14=3/7$; luego $M=\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{9}{7}\right)$

Imponemos que M sea el punto medio de OO', entonces $\left.\begin{cases}3/7=a/2\\6/7=b/2\\9/7=c/2\end{cases}\right\}\Rightarrow\boxed{O'=\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7},\frac{18}{7}\right)}$

b) Sea $\pi' \perp \pi$, que contiene al eje OZ

Si $\vec{n}_{\pi'}$ es vel vector normal de π', $\left\{\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{n}_{\pi} \\ \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{v}_{OZ} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} = \vec{n}_{\pi} \wedge \vec{v}_{OZ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,0)$

Así $\pi': 2x - y + D = 0$; como eje OZ $\subset \pi' \Rightarrow O(0,0,0) \in \pi'$, luego $D = 0$, $\boxed{\pi': 2x - y = 0}$

c) Sean A, B, C y O(0,0,0) vértices del tetraedro, con:

- $A = \pi \cap OX \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(6,0,0)$
- $B = \pi \cap OY \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 6 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,3,0)$
- $C = \pi \cap OZ \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 6 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,0,2)$

Volumen tetraedro = $\frac{1}{6} \cdot \left|[OA, OB, OC]\right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot 36 \Rightarrow \boxed{V = 6}$

---

36) $\pi: 2x - 2y + z = 4$. Sea $P(x, y, 0) \in z = 0$,

$$d(P, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|2x - y - 4|}{3} = 3 \Rightarrow |2x - y - 4| = 9 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x - y - 13 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{array} \right.$$

---

37) Sea $\pi: 2x - 2y + z = -2$

Cortes de π con los ejes coordenados:

- $A = \pi \cap \{x = 0\} \Rightarrow A(a,0,0) \cap \pi: 2x - 2y + z = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A = (-1,0,0)$
- $B = \pi \cap \{y = 0\} \Rightarrow B(0,b,0) \cap \pi: 2x - 2y + z = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B = (0,1,0)$
- $C = \pi \cap \{z = 0\} \Rightarrow C(0,0,c) \cap \pi: 2x - 2y + z = -2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow C = (0,0,-2)$

a) $d(O, \pi) = \frac{2}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{2}{3}}$

b) Sea r_h dicha recta, $r_h \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_{rh} = (2,-2,1)$. Además $O \in r_h$, entonces $\boxed{r_h: \left\{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.}$

c) Area del tetraedro contenido en π es el área del triángulo ABC

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|AB\wedge AC\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2,2,-1)\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+4+1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

---

38) Consideremos el punto P(1,3,-1),

a) Sea $X(x,y,z)$, $d(X,P)=3\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=3\Rightarrow\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9}$

b) Sea $r:\begin{cases} x=3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-4\lambda\end{cases}$, un punto genérico de r sería $P(3\lambda,1+\lambda,1-4\lambda)$. Como $d(X,P)=3$, se tiene

$\sqrt{(3\lambda-1)^2+(\lambda-2)^2+(2-4\lambda)^2}=3\Rightarrow(3\lambda-1)^2+(\lambda-2)^2+(2-4\lambda)^2=9\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0 \\ \lambda=1\end{cases}$ .La solución son dos puntos $\boxed{P(0,1,1)}$ y $\boxed{P(3,2,-3)}$

---

39) Sean las rectas, $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$; $s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$

Sabemos que $\left\{\begin{matrix}\vec{v}_r(2,3,4) \\ A_r(1,1,1) \\ \vec{v}_s(1,-1,2) \\ A_s(-1,2,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow A_rA_s=(-2,1,-1)\quad \vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2,0,-1)$

a) Perpendicular común

Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=(2,0,-1))$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y al vector** $\vec{v}_t$ $\alpha:\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 3 & 0 \\ z-1 & 4 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha:3x-10y+6z+1=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_t$ $\beta:\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z & 2 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\beta:x+5y+2z-9=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases}3x-10y+6z+1=0 \\ x+5y+2z-9=0\end{cases}}$

b) $\left|\left[AA,\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\left|-15\right|=15$; $\left|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s\right|=\sqrt{5}$. Así $d(r,s)=\frac{15}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{5}=\boxed{3\sqrt{5}}$

---

40) Construimos matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & \lambda-2 & 2+\lambda\\ 2\lambda+2 & 0 & -\lambda-6\end{pmatrix}$; $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \lambda\\ 4 & \lambda-2 & 2+\lambda & \lambda+2\\ 2\lambda+2 & 0 & -\lambda-6 & -\lambda\end{array}\right)$

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & \lambda-2 & 2+\lambda\\ 2\lambda+2 & 0 & -\lambda-6\end{vmatrix}=-3\lambda^2-2\lambda+16=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=8/3\end{cases}$$

- Caso 1.- Si $\lambda\neq 2;\ \lambda\neq 8/3\Rightarrow rang(M)=rang(M^*)=3$, **se cortan en un punto**
- Caso 2. Si $\lambda=2$, sustituyendo, $rang(M)=2\neq rang(M^*)=3$

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 4 & 4\\ 6 & 0 & -8 & -2\end{array}\right)\underset{F_3-6F_1}{\overset{F_2-4F_1}{=}}rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -14 & -14\end{array}\right)$$

El plano π_2 y π_1 son paralelos y π_3 corta a ambos

- Caso 3.- Si $\lambda=-8/3$, sustituyendo, $rang(M)=2\neq rang(M^*)=3$

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -8/3\\ 4 & 14/3 & -2/3 & -2/3\\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3\end{array}\right)\underset{3F_3}{\overset{3F_2}{=}}rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -8/3\\ 12 & -14 & -2 & -2\\ -10 & 0 & -10 & 8\end{array}\right)\underset{F_3+10F_1}{\overset{F_2-12F_1}{=}}=$$

$$rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -8/3\\ 0 & -14 & -14 & 32\\ 0 & 0 & 0 & -56/3\end{array}\right)$$

El plano π_3 y π_1 son paralelos y π_2 corta a ambos

---

41) Sean las rectas $r:\begin{cases}x-y=3\\ x+y-z=0\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x-y+z=3\\ 3x+z=1\end{cases}$

a) Se puede comprobar que se cruzan. Calculamos sus vectores directores:

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,1,2)\quad;\quad \vec{v}_s=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,2,1)$$

Si t es la recta perpendicular común $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-3,1,1)$

Como $O(0,0,0)\in t$, se tiene $\boxed{t:\frac{x}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}}$

b) Sea $Q=s\cap t$. Expresamos las dos rectas en paramétricas:

$s:\begin{cases}x=4+\mu\\ y=1+2\mu\\ z=\mu\end{cases}$ $t:\begin{cases}x=-3\theta\\ y=\theta\\ z=\theta\end{cases}$. Hallamos puntos comunes $\begin{Bmatrix}4+\mu=-3\theta\\ 1+2\mu=\theta\\ \mu=\theta\end{Bmatrix}\Rightarrow\mu=\theta=-1$

Sustituyendo, $\boxed{Q=(3,-1,-1)}$

---

42) Familia de planos, $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$

a) Operando en la expresión anterior, $-2y+3z+1+m(x+y+3z+1)=0$

Recta común, $\boxed{\begin{cases} -2x+3z+1=0 \\ x+y+3z+1=0 \end{cases}}$

b) Plano que pasa por P(1,1,0). Sustituimos $x=y=1,\ z=0 \Rightarrow 3m+1=0 \Rightarrow m=-\dfrac{1}{3}$

Para este valor, familia de planos: $-2y+3z+1-\dfrac{1}{3}(x+y+3z+1)=0 \Rightarrow \boxed{x-7y-6z-2=0}$

c) Sea $r:\begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,1,1)$

Si π es paralelo a r, $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r=0 \Rightarrow (m,m-2,3m+3)\cdot(2,1,1)=0 \Rightarrow m=-1/6$

Sustituyendo, este valor, $-\dfrac{1}{6}x+\left(-\dfrac{1}{6}-2\right)y+3\left(-\dfrac{1}{6}+1\right)z+\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=0 \Rightarrow$

$\boxed{\pi: x+13y-15z+5=0}$

---

43) Sean las rectas, $r:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-4}$; $s:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$

Calculamos $\left\{\begin{array}{c} \vec{v}_r(-2,2,-4) \\ A_r(-1,2,0) \\ \vec{v}_s(3,1,1) \\ A_s(2,-1,-2) \end{array}\right\}$ Sea **t** la recta que corta a ambas y pasa por O(0,0,0)

a) Construimos dos planos:

Plano α que contiene a la recta r y pasa por O: $\alpha:\begin{vmatrix} x+1 & -2 & -1 \\ y-2 & 2 & 2 \\ z & -4 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 4x+2y-z=0}$

Si $A_r(-1,2,0)$, $O(0,0,0) \Rightarrow OA_r=(-1,2,0)$

Plano β que contiene a la recta s y pasa por O: $\beta:\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 2 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z+2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\beta: x-8y+5z=0}$

Si $A_s(2,-1,-2)$, $O(0,0,0) \Rightarrow OA_s=(2,-1,-2)$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases} 4x+2y+z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{cases}}$

---

b) Perpendicular común

Sea **p** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_p = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,-5,-4)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y al vector** $\vec{v}_p$ **,** $\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y-2 & 2 & -5 \\ z & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 7x+5y-z-3=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_p$ **,** $\beta: \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 1 & -5 \\ z+2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta: x+15y-18z-23=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t: \begin{cases} 3x-10y+6z+1=0 \\ x+5y+2z-9=0 \end{cases}}$

---

44) Sea $r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Un punto genérico de ella $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$.

Si Q es su proyección ortogonal sobre el plano $z=0$, $Q(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

$$S(OPQ) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |OP \wedge OQ| = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{matrix} \right\| = 1 \Rightarrow |(-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)| = 2 \Rightarrow \sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{25\lambda^4} = 2 \Rightarrow 5\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Luego dos posibilidades:

$\boxed{P_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)}$ o $\boxed{P_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)}$

---

45) Sean las rectas $r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1}$; $s: \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$

Calculamos sus vectores directores:

$\vec{v}_r = (-3,4,1)$, $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (9,-12,-3) = (3,-4,-1)$. Es claro que $\vec{v}_r = -\vec{v}_s$, luego **son paralelas**

---

46) Sean A(0,1,0), B(1,0,1)

a) Sea $X(x,y,z)\Rightarrow d(X,A)=d(X,B)\Rightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}\Rightarrow$ Elevando al cuadrado, $x^2+(y-1)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+z^2\Rightarrow-2y=-2x\Rightarrow\boxed{x-y=0}$

b) Como $d(A,B)=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$, Si $X(x,y,z)\Rightarrow d(X,A)=\sqrt{3}$, con lo que

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{x^2+(y-1)^2+z^2=3}$$

c) Sea el plano $\pi: x+y+z=3$. Si el triángulo ABC tiene que ser rectángulo con ángulo recto en el vértice A, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

como $C(x,y,z)\Rightarrow(x-0,y-1,z-0)\cdot(1,-1,1)=0\Rightarrow x-y+z+1=0$

La recta pedida será $r:\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+z=-1\end{cases}$, que en paramétricas sería, $\boxed{r:\begin{cases}x=-\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}}$

---

47) Sean los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$, $O(0,0,0)$

a) $V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&\lambda&0\\1&0&0&4\end{matrix}\right\|=2\Rightarrow\frac{4\lambda}{6}=2\Rightarrow4\lambda=12\Rightarrow\boxed{\lambda=3}$

b) Sea h_O la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

Se tiene, $h_O=d(O,\pi_{ABC})=\frac{|-12|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{169}}\Rightarrow\boxed{d=\frac{12}{13}}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-1,3,0)\\\overrightarrow{CD}=(-1,0,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\pi_{ABC}:\begin{vmatrix}x-1&-1&-1\\y&3&0\\z&0&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi:12x+4y+3z-12=0$$

---

48) Sea el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r:\begin{cases}x+y+1=0\\z=0\end{cases}$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$

a) Sea π' el plano pedido. $\left\{\begin{matrix}\pi'\,||\,r\Rightarrow\vec{v}_r\in\pi'\\\pi'\perp\pi\Rightarrow\vec{n}_{\pi'}\in\pi'\end{matrix}\right\}$

Calculamos vectores: $\vec{n}_\pi=(1,-2,-3)$; $\vec{v}_r=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(1,-1,0)$

Como además $A(1,-2,-3)\in\pi'$, el plano será, $\pi':\begin{vmatrix}x-1&1&1\\y+2&-1&-2\\z+3&0&-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\pi':3x+3y-z=0}$

b) Sea r en paramétricas, $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$, y $P_r(-\lambda-1,-\lambda,0)$ un punto genérico de ella.

Llamamos **s** a la recta pedida, es paralela a π luego $\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi$. **(*)**

Como esta recta pasa por A, si suponemos que P_r es el punto de intersección de **r** y **s,**

$\vec{v}_s = \overrightarrow{AP_r} = (-1+\lambda-1,-\lambda+2,3) = (\lambda-2,-\lambda+2,3)$

Aplicando **(*)** $(\lambda-2,-\lambda+2,3)\cdot(1,-2,-3)=0 \Rightarrow \lambda-2+2\lambda-4-9=0 \Rightarrow \lambda=5$; luego $P_r(4,-5,0)$

A su vez, $\vec{v}_s = (5-2,-5+2,3)=(3,-3,3)=(1,-1,1)$

La recta pedida será, $\boxed{s:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1}}$

---

49) Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$, $C(\lambda,0,\lambda+2)$

a) Consideremos $\overrightarrow{AB}=(2-\lambda,-\lambda-2,-\lambda)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{BC}=(\lambda-2,\lambda,\lambda+2)$

Si A, B y C están alineados, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\lambda-2 & -\lambda \\ 0 & -2 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda & \lambda+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 0=0$ (luego no existe λ)

b) Calculamos distancias:

$d(A,B)=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-\lambda-2)^2+\lambda^2}=\sqrt{3\lambda^2+8}$

$d(A,C)=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=\sqrt{8}$

$d(B,C)=\sqrt{(\lambda-2)^2+\lambda^2+(\lambda+2)^2}=\sqrt{3\lambda^2+8}$

Luego AB = BC, entonces el triángulo es isósceles.

c) Si $\lambda=0 \Rightarrow A(0,2,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,0,2)$. Formamos $\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)$, luego

$$\pi:\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y+2 & -2 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-2=0}$$

$$d(O,\pi)=\frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

---

50) Consideremos la recta $r:\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{-1}$, y el plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$

Pasamos r a paramétricas, y tomamos un punto genérico.

Tomamos un punto genérico de r, $P(3+\lambda,5+\lambda,-1-\lambda)$

Como $d(P,\pi)=1 \Rightarrow \frac{|2(3+\lambda)-(5+\lambda)+2(-1-\lambda)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=1 \Rightarrow \frac{|-\lambda|}{3}=1 \Rightarrow |-\lambda|=3 \Rightarrow \lambda=\pm 3$

Obtenemos dos puntos, $\boxed{P_1(0,2,2)}$, $\boxed{P_2(6,8,-4)}$

---

51) Sean las rectas $r:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ Calculamos sus vectores directores:

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,2)\ ;\ \vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,-2,-1)$$

Si t es la recta pedida $\begin{Bmatrix} t\perp r \\ t\perp s \end{Bmatrix}\Rightarrow \vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(3,-1,-1)$

Como $P(2,-1,2)\in t\Rightarrow \boxed{t:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}}$

---

52) Sean las rectas $r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$; $s:\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$

a) Sea π el plano buscado

$$\vec{v}_r=(1,-1,2)\ ;\ \vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=(3,1,1)\ ;\ \begin{Bmatrix} r\subset\pi\Rightarrow\vec{v}_r\in\pi \\ s\,\|\,\pi\Rightarrow\vec{v}_s\in\pi \end{Bmatrix}\Rightarrow \text{ como } A(0,1,2)\in\pi$$

$$\pi:\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\pi:3x-5y-4z+13=0}$$

b) $d(s,\pi)=d(P_s,\pi)$, tomamos $P_s(5,0,-1)$, $d(s,\pi)=\frac{|15+4+13|}{\sqrt{9+25+16}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}=\boxed{\frac{4}{5}}$

---

53) Sean las rectas $r:\begin{cases} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$

a) <u>Posición relativa</u> : Calculamos sus vectores directores

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=(-a,-1,-a)\ ;\ \vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,1)$$

Un punto de cada uno de ellas es $A_r=(2,0,1)$, $A_s=(1,3,0)$, así $\vec{A_rA_s}=(-1,3,-1)$

Formamos la matriz $M^*=\left(\begin{array}{cc|c} -a & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ a & 1 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow |M^*|=4a=0\Rightarrow a=0$

<u>Caso 1</u>.- Si $a\neq 0$, $rang(M)=2$, $rang(M^*)=3$, **las rectas se cruzan**

Caso 2.- Si $a=0$, $rang(M)=2=rang(M^*)$, **las rectas se cortan en un punto**

b) Sea $a=1$, $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{A_rA_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}$;

$$\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,2,2)\Rightarrow|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|=\sqrt{8}\ ;\ \left|\left[\vec{A_rA_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4$$

Así $d(r,s)=\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4\sqrt{8}}{8}=\dfrac{8\sqrt{2}}{8}=\boxed{\sqrt{2}}$

---

54) Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$

a) Formamos $\vec{AB}=(1,0,-2)$, $\vec{AC}=(0,1,-3)$ y calculamos el plano que pasa por A, B y C

$$\pi:\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 2x+3y+z-1=0.$$

Sustituyendo D, $7\neq 0$, luego $D\notin\pi$, **no son coplanarios**

b) $\boxed{\pi:2x+3y+z-1=0}$ (Ver a))

c) $d(D,\pi)=\dfrac{|2+6+1|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{14}}=\dfrac{7\sqrt{14}}{14}=\boxed{\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$

---

55) Sea el plano $\pi:3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$

a) Sea $r\perp\pi\Rightarrow\vec{v}_r\,||\,\vec{n}_\pi\Rightarrow\vec{v}_r=(3,2,-1)$. Como además $P\in r$, $\boxed{r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}}$

b) $Q=r\cap\pi$; La recta *r* en paramétricas: $r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$;

Un punto genérico de *r*, $Q=(1+3\lambda,2+2\lambda,3-\lambda)$, sustituyendo en π:

$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)-(3-\lambda)+10=0\Rightarrow 14\lambda+14=0\Rightarrow\lambda=-1$, luego $\boxed{Q\,(-2,0,4)}$

c) Sea $R=OY\cap\pi$, el eje $OY=\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, luego $R=(0,t,0)$, sustituyendo en el plano π:

$2y+10=0\Rightarrow y=-5$, con lo que el punto $\boxed{R\,(0,-5,0)}$

d) Area (*PQR*) $=\dfrac{1}{2}\left|\vec{QP}\wedge\vec{QR}\right|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \end{matrix}\right\|=\dfrac{|(3,-14,19)|}{2}=\dfrac{\sqrt{9+196+361}}{2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{566}}{2}}$

---

56) Sean los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$

a) Sea $R(x,y,z)$, con $d(P,R)=d(Q,R)\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}\Rightarrow$

elevando al cuadrado, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=x^2+(y-1)^2+z^2$; operando se obtiene el plano $\boxed{x+3z-5=0}$

b) Sea $S\in r_{PQ}$, con $d(P,S)=2\cdot d(Q,S)$

Construimos la recta que pasa por P y Q, $\vec{PQ}=(-1,0,-3)$, luego $r_{PQ}:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=1\\ z=3-3\lambda\end{cases}$

Un punto genérico de esta recta, $S=(1-\lambda,1,3-3\lambda)$, como $d(P,S)=2\cdot d(Q,S)$, se tiene

$\sqrt{(1-\lambda-1)^2+0^2+(3-3\lambda-3)^2}=2\cdot\sqrt{(1-\lambda)^2+0^2+(3-3\lambda)^2}\Rightarrow$ elevando al cuadrado y operando, $10\lambda^2=4(10\lambda^2-20\lambda+10)$, simplificando, $3\lambda^2-8\lambda+4=0$, resolviendo obtenemos

$\lambda=\left\langle\begin{matrix}2\\2/3\end{matrix}\right.$; con lo que obtenemos dos puntos: $\boxed{S_1\ (-1,1,-3)\,;\,S_2\ (1/3,1,1)}$

---

57) Consideremos las rectas $r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$; $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4}$

Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s==\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=(-1,2,-1)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y al vector** $\vec{v}_t$ **,** $\alpha:\begin{vmatrix}x+1&1&-1\\y-2&2&2\\z&3&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha:4x+y-2z+2=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_t$**,** $\beta:\begin{vmatrix}x&2&-1\\y-1&3&2\\z&4&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\beta:11x+2y-7z-2=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases}4x+y-2z+2=0\\11x+2y-7z-2=0\end{cases}}$

---

58) Sea el plano $\pi_1:x+y+z=1$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-4}$

a) Sea $P=r\cap\pi_1$; La recta *r* en paramétricas: $r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-4\lambda\end{cases}$; luego $P(1+2\lambda,-1+3\lambda,-4\lambda)$

Sustituyendo en π, $1+2\lambda-1+3\lambda-4\lambda=1\Rightarrow\lambda=1$, luego $\boxed{P\ (3,2,-4)}$

b) Sea $\pi_2\,||\,\pi_1\Rightarrow\pi_2:x+y+z=K$

Sabemos que $r\cap\pi_1=P(3,2,-4)$; $r\cap\pi_2=Q$

Calculamos el punto Q en función de K (de manera análoga que P en el apartado anterior a))

$Q(1+2\lambda,-1+3\lambda,-4\lambda)$. Sustituyendo en π, $1+2\lambda-1+3\lambda-4\lambda=1 \Rightarrow \lambda=K$,con lo que el punto Q será, $Q(1+2K,-1+3K,-4K)$.

Como $d(P,Q)=\sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(1+2K-3)^2+(-1+3K-2)^2+(-4K+4)^2}=\sqrt{29} \Rightarrow 29(K-1)^2=29$

Luego $K=0$ ó $K=2$. Así obtenemos dos planos: $\boxed{\pi_1: x+y+z=0}$ y $\boxed{\pi_2: x+y+z=2}$

---

59) Sea el plano $\pi \equiv x+3y+z=4$, se pide:

a) Sea r la recta perpendicular a π que pasa por O(0,0,0) $\Rightarrow r: \frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Sea $M=r\cap\pi \Rightarrow \lambda+9\lambda+\lambda=4 \Rightarrow 11\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{11}$. Se tiene que $M=\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)$

Sea $O'(a,b,c)$ el punto simétrico pedido, imponemos que M sea el punto medio de OO':

$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)$, igualando componentes: $\left\{\begin{matrix} 4/11=a/2 \\ 12/11=b/2 \\ 4/11=c/2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{O'=\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)}$

b) El vector normal del plano $x=0$, es $\vec{n}=(1,0,0)$ y el de : $\vec{n}_\pi=(1,3,1)$;

Se tiene que $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_\pi|}=\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+9+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\boxed{\frac{\sqrt{11}}{11}}$

c) Calculamos vértices del tetraedro, además del origen:

- $A=\pi\cap\{x=0\} \Rightarrow A(a,0,0)\cap\pi: x+3y+z=4 \Rightarrow a=4 \Rightarrow A=(4,0,0)$
- $B=\pi\cap\{y=0\} \Rightarrow B(0,b,0)\cap\pi: x+3y+z=4 \Rightarrow b=3 \Rightarrow B=(0,4/3,0)$
- $C=\pi\cap\{z=0\} \Rightarrow C(0,0,c)\cap\pi: x+3y+z=4 \Rightarrow c=4 \Rightarrow C=(0,0,4)$

$$V(T)=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\frac{64}{3} \Rightarrow \boxed{V(T)=\frac{32}{9}}$$

---

60) a) Sea π el plano buscado

$\vec{v}_r=(2,3,1)$; $\vec{v}_s=(2,1,1)$; $\left\{\begin{matrix} r\subset\pi \Rightarrow \vec{v}_r\in\pi \\ s \,|\, |\pi \Rightarrow \vec{v}_s\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ como $A(1,2,0)\in\pi$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-2 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x-4z-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2z-1=0}$$

b) Determinar la distancia entre las rectas r y s

$d(r,s)=d(s,\pi)$ (con π el plano calculado en el apartado anterior). Es decir, si $P(-2,0,2)\in s$, se tiene que: $d(r,s)=d(P,\pi)=\dfrac{|-2-4-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}\Rightarrow \boxed{d(r,s)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}}$

c) Como t es paralela a $r\Rightarrow \vec{v}_t=\vec{v}_r=(2,3,1)$, como pasa por O(0,0,0), $t:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}\Rightarrow t:\begin{cases}x=2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$

A su vez, la recta s en paramétricas es: $s:\begin{cases}x=-2+2\mu\\ y=\mu\\ z=2+\mu\end{cases}$ Igualando coordenadas:

$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda=-2+2\mu\\ 3\lambda=\mu\\ \lambda=2+\mu\end{cases}\Rightarrow$ Resolviendo: $\begin{cases}\lambda=1/2\\ \mu=3\lambda\\ \lambda=-1\end{cases}$, lo que es imposible. Luego <u>no se cortan</u>

---

61) Calculamos $\begin{Bmatrix}\vec{v}_r(1,2,a)\\ A_r(0,0,0)\\ \vec{v}_s(b,1,-1)\\ A_s(3,0,3)\end{Bmatrix}$ Además, $\overrightarrow{A_rA_s}=(3,0,3)$

Si r y s se cortan, son coplanarias, luego $rang\begin{pmatrix}1&b&3\\2&1&0\\a&-1&3\end{pmatrix}<3\Rightarrow\begin{vmatrix}1&b&3\\2&1&0\\a&-1&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow -3a-6b-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a+2b+1=0}$

Si r y s son perpendiculares: $\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0\Rightarrow(1,2,a)\cdot(b,1,-1)=0\Rightarrow\boxed{b+2-a=0}$

Resolviendo el sistema: $\begin{Bmatrix}a+2b+1=0\\ b+2-a=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{a=1}$ y $\boxed{b=-1}$

---

62) Sea el plano $\pi\equiv 2x-y+2z+1=0$. Si $\pi'\,||\,\pi$, se tiene que $\pi'\equiv 2x-y+2z+K=0$

Como $d(\pi',\pi)=3\Rightarrow\dfrac{|k-1|}{\sqrt{4+1+4}}=3\Rightarrow\dfrac{|k-1|}{3}=3\Rightarrow|k-1|=9\Rightarrow\begin{cases}k-1=9\Rightarrow k=10\\ k-1=-9\Rightarrow k=-8\end{cases}$

Luego la solución serán dos planos: $\boxed{\pi_1\equiv 2x-y+2z+10=0}$ y $\boxed{\pi_2\equiv 2x-y+2z-8=0}$

---

63) Primero estudiamos posición relativa de la recta y el plano

$r\equiv\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$ Sustituyendo en el plano $\pi\equiv 1+\lambda-\lambda-2\lambda+1=0\Rightarrow 2-2\lambda=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\lambda=1$. Con lo que la recta y el plano se cortan en $\boxed{P(2,-1,1)}$

Calculamos ahora el simétrico de un punto cualquiera A de la recta r respecto del plano π

- Sea $A(1,0,0)\in r$ y sea $A'(a,b,c)$ su simétrico
- Calculamos la recta s perpendicular a $\pi \equiv x+y-2z+1=0$ que pasa por A:

Si $s\perp\pi \Rightarrow \vec{v}_s \,\|\, \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s=(1,1,-2)$, como pasa por A, $s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=-2\mu \end{cases}$

- Calculamos el punto $M=s\cap\pi$; $1+\mu+\mu+4\mu+1=0\Rightarrow 6\mu=-2\Rightarrow \mu=-\frac{1}{3}$.Luego $M\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right)$
- Imponemos que M sea el punto medio de AA':

$$\left.\begin{cases} (a+1)/2=2/3 \\ b/2=-1/3 \\ c/2=2/3 \end{cases}\right\}\Rightarrow \boxed{A'\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)}$$

La recta simétrica r' pedida será la que pasa por los puntos P y A':

$\overrightarrow{PA'}=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ ó bien $(-5,1,1)$. Con lo que $\boxed{r'\equiv\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}}$

---

64) **a)** Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s==\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=(13,-9,-1)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r y a** $\vec{v}_t$ **,** $\alpha:\begin{vmatrix} x & 2 & 13 \\ y-1 & 3 & -9 \\ z+4 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\alpha:12x+11y+57z+217=0}$

Plano β **que contiene a la recta s y al vector** $\vec{v}_t$**,** $\beta:\begin{vmatrix} x & 1 & 13 \\ y & 1 & -9 \\ z & 4 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\beta:35x+53y-22z=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases} 12x+11y+57z+217=0 \\ 35x+53y-22z=0 \end{cases}}$

b) Como las rectas se cruzan , $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}$; $A_r=(0,1,-4), A_s=(0,0,0)\Rightarrow A_rA_s=(0,-1,4)$

$\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=(13,-9,-1)\Rightarrow|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|=\sqrt{251}$; $\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}=4$

Así $d(r,s)=\dfrac{4}{\sqrt{251}}=\boxed{\dfrac{4\sqrt{251}}{251}}$

---

65) a) Sean las rectas : $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, $s: \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$. Se tiene: $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,2,-1)$

Como $\vec{v}_r = (1,2,-1)$ las rectas son paralelas

$A_r = (0,1,-1)$. Para hallar un punto de s, hacemos $x=0$, luego $\begin{cases} z=3 \\ -y=2 \end{cases} \Rightarrow A_s = (0,-2,3)$

Formamos $A_rA_s = (0,-3,4)$. Así el plano pedido será: $\pi: \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y-1 & -3 & 2 \\ z+1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x-4y-3z+1=0}$

b) $d(A,s) = \frac{|A\vec{A}_s \wedge \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\|(-5,4,3)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{d = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$

---

66) a) $Vol = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot 6 = \boxed{1}$

b) Calculamos el plano π que pasa por $P=(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$

$PQ = (-1,2,0)$, $PR = (-1,0,3)$. Así : $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 6x+3y+2z-6=0$

Sea $r \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_r \,||\, \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r = (6,3,2)$. Como además $O \in r$, $\boxed{r: \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}}$

Sea $M = r \cap \pi$; La recta *r* en paramétricas: $r: \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$;

Un punto genérico de *r*, $M = (6\lambda, 3\lambda, 2\lambda)$, sustituyendo en π :

$6 \cdot 6\lambda + 3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 49\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{49}$, luego $\boxed{M\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)}$

Si $O'(a,b,c)$ es el simétrico pedido imponemos que M sea el punto medio de OO'

$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$, igualando componentes: $\begin{rcases} 36/49 = a/2 \\ 18/49 = b/2 \\ 12/49 = c/2 \end{rcases} \Rightarrow \boxed{O' = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)}$

---

67) a) $\vec{v}_r=(-2,1,3)$, $A_r=(-1,2,-1)$, $d(A,s)=\dfrac{|\vec{PA_r}\wedge\vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{4+1+9}}=\dfrac{\|(6,9,1)\|}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}}\Rightarrow \boxed{d=\dfrac{\sqrt{413}}{7}}$

b) La recta r en paramétricas $r:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1+3\lambda\end{cases}$. Sea P'(a,b,c) simétrico de P respecto de r

Construimos plano π perpendicular a r , que pase por P , $\pi\perp r\Rightarrow \vec{v}_r \,||\, \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi=(-2,1,3)$

$\Rightarrow \pi: -2x+y+3z+K=0$, si $P(2,0,-1)\in\pi\Rightarrow -7+K=0\Rightarrow K=7$

Luego $\Rightarrow \pi: 2x-y-3z+7=0$; Sea $Q=r\cap\alpha\Rightarrow\ \Rightarrow 2(-1-2\lambda)-2-\lambda-3(-1+3\lambda)-7=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\lambda=-\dfrac{4}{7}$. Sustituyendo en r: $Q=\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{10}{7},-\dfrac{19}{7}\right)$. Imponemos que Q sea el punto medio de PP'

$\left(\dfrac{2+a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c-1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{10}{7},-\dfrac{19}{7}\right)$, igualando componentes: $\left.\begin{cases} 1/7=(a+2)/2 \\ 10/7=b/2 \\ -19/7=(c-1)/2\end{cases}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P'=\left(-\dfrac{12}{7},\dfrac{20}{7},-\dfrac{31}{7}\right)}$

---

68) Consideremos el plano $\pi\equiv 2x+ay+4z+25=0$ y la recta : $r\equiv x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{5}$,

a) Expresamos la recta r como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} x+1=\dfrac{y-1}{2}\Rightarrow 2x+2=y-1 \\ x+1=\dfrac{z+3}{5}\Rightarrow 5x+5=z+3\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 5x-z+2=0\end{cases}$$

Si $r\subset\pi\Rightarrow rang\,M=rang\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}=rang\,M^*=rang\begin{pmatrix} 2 & a & 4 & 25 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=2.$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 22+2a=0\Rightarrow \boxed{a=-11}$

b) Si $a=-2\Rightarrow\ \pi\equiv 2x-2y+4z+25=0\Rightarrow \vec{n}_\pi=(2,-2,4)=(1,-1,2)$

Sea $s\perp\pi\Rightarrow \vec{v}_s \,||\, \vec{n}_\pi\Rightarrow \vec{v}_s=(1,-1,2)$, como $P=\left(-\dfrac{3}{2},0,-\dfrac{11}{2}\right)\in s\Rightarrow s:\begin{cases} x=-3/2+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-11/2+2\lambda\end{cases}$

Sea $Q=\left(-\frac{3}{2}+\lambda,2\lambda,-\frac{11}{2}+\lambda\right)\in s$ tal que $d(Q,\pi)=\sqrt{6}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{3}{2}+\lambda\right)+2\lambda+4\cdot\left(-\frac{11}{2}+\lambda\right)+25\right|}{\sqrt{4+4+16}}=\sqrt{6}\Rightarrow\Rightarrow\frac{\left|-3+2\lambda+2\lambda-22+8\lambda+25\right|}{\sqrt{24}}=\sqrt{6}\Rightarrow$$

$\Rightarrow|12\lambda|=\sqrt{144}=12\Rightarrow 12\lambda=\left\langle\begin{matrix}12\\-12\end{matrix}\right.\Rightarrow\lambda=\pm1$. Sustituyendo en Q:

$\boxed{Q_1=\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{7}{2}\right)}$ y $\boxed{Q_2=\left(-\frac{5}{2},1,-\frac{15}{2}\right)}$

c) Si $a=-2\Rightarrow\vec{n}_\pi=(2,-2,4)$ y $\vec{v}_r=(1,2,5)$. Así: $sen\,\alpha=\frac{|(2,-2,4)\cdot(1,2,5)|}{\sqrt{4+4+16}\cdot\sqrt{1+4+25}}=\frac{18}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{30}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{\alpha=42^{\circ}\,13'}$

---

69) Expresamos las rectas r_1 y r_2 en paramétricas $r_1:\begin{cases}x=\lambda\\y=1\\z=3\end{cases}$; $r_2:\begin{cases}x=0\\y=\mu\\z=\mu\end{cases}$

a) Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t=\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}==\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(0,-1,1)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r₁ y a** $\vec{v}_t$ **,** $\alpha:\begin{vmatrix}x&1&0\\y-1&0&-1\\z-3&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha:y+z-4=0}$

Plano β **que contiene a la recta r₂ y al vector** $\vec{v}_t$ **,** $\beta::\begin{vmatrix}x&0&0\\y&1&-1\\z&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\beta:x=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t:\begin{cases}y+z-4=0\\x=0\end{cases}}$

b) Como las rectas se cruzan , $d(r_1,r_2)=\frac{\left|\left[\vec{A_{r_1}A_{r_2}},\vec{v}_{r_1},\vec{v}_{r_2}\right]\right|}{\left|\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}\right|}$; $A_{r_1}=(0,1,3), A_{r_2}=(0,0,0)\Rightarrow A_{r_1}A_{r_2}=(0,-1,-3)$

$\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}=(0,-1,1)\Rightarrow\left|\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}\right|=\sqrt{2}$; $\left|\left[\vec{A_rA_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix}0&-1&-3\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$, luego $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$

---

70) a) Calculamos ecuación de π_2: $\pi_2 : \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y-2 & 2 & 0 \\ z-4 & 6 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$

Si π_1 y π_2 sean paralelos, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ también serán paralelos, luego $\frac{2}{b} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-a}{-2} \Rightarrow \boxed{b=-2}$, $\boxed{a \neq -2}$

b) Sean $a=1$ y $b=0$ y t la recta intersección de π_1 y π_2. $t : \begin{cases} 3y - z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$. En paramétricas:

$\vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,3)$. Para hallar un punto de t, hacemos en la ecuación $y=0$,

$\Rightarrow \begin{cases} -z-2=0 \\ 2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow A_t = (3/2, 0, -2)$. Luego: $\boxed{t : \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}}$

c) Si $a=4$ y $b=-2$ $\pi_1 : 2x - 3y + z - 4 = 0$ y $\pi_2 : -2x + 3y - z - 2 = 0$. Sea $P(x,y,z)$, tal que

$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|2x-3y+z-4|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|-2x+3y-z-2|}{\sqrt{4+9+1}} \Rightarrow |2x-3y+z-4| = |-2x+3y-z-2| \Rightarrow$.

$\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 2x-3y+z-4 = -2x+3y-z-2 \\ 2x-3y+z-4 = 2x-3y+z+2 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 4x-6y+2z-2=0 \\ -4 = 2 \text{ Imposible} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\pi : 2x - 3y + z - 1 = 0}$

---

71) Se consideran las rectas:

$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1,0,-1)\,;\, A_r = (1,2,3)$ $\quad s \equiv \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-1)$

Punto de s: haciendo $y=0\,;\, A_s = (-2,0,-1)$

Construimos dos planos:

Plano α que contiene a la recta r y pasa por P: $\alpha : \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z+2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha : x - 6y + z + 8 = 0}$

Plano β que contiene a la recta s y pasa por P: $\beta : \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta : 2x - y + 3z + 7 = 0}$

La recta pedida será, $\boxed{t : \begin{cases} x - 6y + z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}}$

---

72) Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

a) Formamos el vector $\overrightarrow{AB} = (a-1, 3, -2)$. Si la recta t ha de ser paralela a la recta s: $\vec{v}_s \,||\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{3}{-3} = \frac{2}{-2} \Rightarrow a-1=-1 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

b) Sea π el plano pedido. Si $r \subset \pi$ y $s \,||\, \pi \Rightarrow \vec{v}_s \subset \pi$

Calculamos $A_r = (-1,0,0)$ y $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,-5)$

Así $\pi : \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -2 \\ y & -3 & -1 \\ z & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0}$

---

73) Sea $\pi \perp \pi_1$ y $\pi \perp \pi_2$, entonces $\left\{ \begin{matrix} \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20,-19,17)$

Como además el plano ha de para por el origen: $\boxed{\pi : 20x - 19y + 17z = 0}$

---

74) a) Calculamos los tres vértices del tetraedro que faltan:

- $A = r_1 \cap \pi = \{x = y = z\} \cap \{2x + 3y + 7z = 24\} \Rightarrow 2x + 3x + 7x = 24 \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{A = (2,2,1)}$
- $B = r_2 \cap \pi = \left\{ \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \cap \{2x + 3y + 7z = 24\} \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \boxed{B = (12,0,0)}$
- $B = r_3 \cap \pi = \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \cap \{2x + 3y + 7z = 24\} \Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow \boxed{C = (0,8,0)}$

$$Vol = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{192}{6} = \boxed{32}$$

b) Sea **t** la recta perpendicular a ambas. Calculamos: $\vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4,-3,-1)$

Construimos dos planos:

Plano α **que contiene a la recta r_1 y a** $\vec{v}_t$ **,** $\alpha : \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y-5 & 2 & -3 \\ z+1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha : 8x+7y+11z-16=0}$

Plano β **que contiene a la recta r_2 y al vector** $\vec{v}_t$**,** $\beta :: \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ y+1 & 3 & -3 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta : 3x+y+9z-8=0}$

La recta pedida será, $\boxed{t : \begin{cases} 8x+7y+11z-16=0 \\ 3x+y+9z-8=0 \end{cases}}$

---

75) Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-2z=1$ **,** $\pi_2 \equiv x-y+2z=1$

a) Como los vectores $\vec{n}_1 = (2,1,-2)$ y $\vec{n}_2 = (1,-1,2)$ no son paralelos, los **planos se cortan en una recta**

b) El vector director de la recta que determinan es $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0,-6,-3) \approx \boxed{(0,-2,-1)}$

Para hallar un punto de dicha recta: hacemos $z=0$ en $\begin{Bmatrix} 2x+y-2z=1 \\ x-y+2z=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x+y=1 \\ x-y=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$;

$y=\dfrac{-1}{3}$. Con lo que el punto será $\boxed{P=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},0\right)}$

---

76) a) Calculamos un punto genérico de $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z+2}{2}$ .Para ello expresamos la recta en

paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow P=(1+2\lambda,-1+\lambda,-2+2\lambda)$. Como $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$, se tiene:

$\dfrac{|2(1+2\lambda)-3(-1+\lambda)+2\lambda-2-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{|2(1+2\lambda)-1+\lambda-3(2\lambda-2)-1|}{\sqrt{4+9+1}} \Rightarrow$ Operando:

$\dfrac{|9\lambda-4|}{\sqrt{14}} = \dfrac{|-\lambda+6|}{\sqrt{14}} \Rightarrow |9\lambda-4| = |-\lambda+6| \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 9\lambda-4=-\lambda+6 \Rightarrow \lambda=1 \\ 9\lambda-4=\lambda-6 \Rightarrow \lambda=-1/4 \end{matrix} \right.$. Con lo que obtenemos dos

puntos: $\boxed{P=(3,0,0)}$, $\boxed{P'=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4},-\dfrac{5}{2}\right)}$

b) Calculamos vértices restantes del tetraedro:

- $A=r_1 \cap \pi_1 = \begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \cap \{2x+3y+z-1=0\} \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)}$
- $B=r_2 \cap \pi_1 = \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \cap \{2x+3y+z-1=0\} \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{B=\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)}$

- $B = r_3 \cap \pi_1 = \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \cap \{2x + 3y + z - 1 = 0\} \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \boxed{C = (0,0,1)}$

$$Vol = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

c) Sea $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2}$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$

Construimos el plano $\pi \perp \pi_2$ con $r \subset \pi$. Se tendrá que $\vec{n}_\pi = \vec{n}_2 \wedge \vec{v}_r$. Como $\vec{n}_2 = (2,1,-3)$ y $\vec{v}_r = (2,1,2)$

$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-10,0) \approx (1,-2,0)$. Así $\pi \equiv x - 2y + D = 0$, como $P(1,-1,-2) \in r \subset \pi$, sustituyendo

$1 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -3$, luego $\pi \equiv x - 2y - 3 = 0$

La recta proyección ortogonal será $\pi \cap \pi_2$, es decir: $\boxed{: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}}$

---

77) a) La recta r en paramétricas $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$. Sea P'(a,b,c) simétrico de P respecto de r

Construimos plano π perpendicular a r , que pase por P , $\pi \perp r \Rightarrow \vec{v}_r \| \, \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi = (2,1,-1)$

$\Rightarrow \pi : 2x + y - z + K = 0$, si $P(0,1,1) \in \pi \Rightarrow K = 0$. Luego $\Rightarrow \pi : 2x + y - z = 0$;

Sea $Q = r \cap \pi \Rightarrow \; \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

Sustituyendo en r: $Q = \left(\frac{4}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6} \right)$. Imponemos que Q sea el punto medio de PP'

$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2} \right) = \left(\frac{4}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6} \right)$, igualando componentes: $\begin{Bmatrix} 4/6 = a/2 \\ -7/6 = (b+1)/2 \\ 1/6 = (c+1)/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = 4/3 \\ b = -10/3 \\ c = -2/3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3} \right)}$

b) Sea t la recta pedida. Como t y $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ se cortan, si $M = t \cap s = (0,0.m)$. Como $P(0,1,1) \in t$

$\overrightarrow{PM} \in t \Rightarrow (0,-1, m-1) \in t$. Ahora bien como $t \perp r \Rightarrow \overrightarrow{PM} \perp \vec{v}_r \Rightarrow (0,-1, m-1) \cdot (2,1,-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 0$, luego $M = (0,0.0)$ y $\overrightarrow{PM} = \vec{v}_t \Rightarrow (0,-1,-1) \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}}$ ó $\boxed{t : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}}$

78) a) Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$,formamos los vectores:

$\overrightarrow{P_1P_2}=(a-1,-1,1)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,5)$ y $\overrightarrow{P_1P_4}=(1,-3,3)$

Si los puntos están en el mismo plano los vectores anteriores serán linealmente dependientes. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 21a-28=0 \Rightarrow a=\frac{28}{21} \Rightarrow \boxed{a=\frac{4}{3}}$$

b) $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|=7 \Rightarrow \frac{1}{6}|21a-28|=\frac{1}{6}\cdot 7|3a-4|=7 \Rightarrow |3a-4|=6 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 3a-4=6 \Rightarrow 3a=10 \\ 3a-4=-6 \Rightarrow 3a=-2 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow$

$\boxed{a=\frac{10}{3}}$ y $\boxed{a=-\frac{2}{3}}$

c) Sea π con $d(P_1,\pi)=d(P_3,\pi)$. El punto medio de $\overline{P_1P_3}\in\pi \Rightarrow \left(1,4,\frac{3}{2}\right)\in\pi$.

Por otra parte $\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,5)$ será perpendicular al plano π. Luego $\pi: 2y+5z+K=0$.

Como el punto medio anterior está en el plano: $2\cdot 4+5\cdot\frac{3}{2}+K=0 \Rightarrow K=-\frac{31}{2}$.

Sustituyendo en el plano: $\pi: 2y+5z-\frac{31}{2}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4y+10z-31=0}$

---

79) a) Calculamos un punto de cada una de ellas y sus vectores directores

$\vec{v}_{r_1}=(3,-5,2)$; $A_{r_1}=(2,1,0)$; $\vec{v}_{r_2}=(-1,1,0)$; $A_{r_2}=(-1,3,5)$. Formamos el vector $\overrightarrow{A_{r_1}A_{r_2}}=(-3,2,5)$

Estudiamos rango de la matriz determinada por los tres vectores: $M^*=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{array}\right)$

$|M^*|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=8 \Rightarrow rang(M^*)=3$. Como $rang(M)=rang\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=2$

Las rectas se cruzan

b) Como por a) $\left|\left[A_r\vec{A}_s,\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=8$, y $\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}=(-2,-2,-2) \Rightarrow \left|\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}\right|=\sqrt{12}$

$$d(r_1,r_2)=\frac{\left|\left[A_{r_1}\vec{A}_{r_2},\vec{v}_{r_1},\vec{v}_{r_2}\right]\right|}{\left|\vec{v}_{r_1}\wedge\vec{v}_{r_2}\right|}=\frac{8}{\sqrt{12}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{d=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

;, luego $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$

---

80) Expresamos la recta r en paramétricas $r:\begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2+3\lambda \end{cases}$. Un punto genérico de r será de la forma:

$P=(4+2\lambda,1-\lambda,2+3\lambda)$. Como $d(P,\pi)=1$, se tiene: $\frac{|2(4+2\lambda)+1-\lambda+2(2+3\lambda)-7|}{\sqrt{4+4+1}}=1\Rightarrow$ Operando

$\frac{|-2-3\lambda|}{3}=1\Rightarrow|-2-3\lambda|=3\Rightarrow\left\langle\begin{matrix} -2-3\lambda=3\Rightarrow-3\lambda=5\Rightarrow\lambda=-5/3 \\ -2-3\lambda=-3\Rightarrow-3\lambda=-1\Rightarrow\lambda=1/3 \end{matrix}\right.$. sustituyendo estos valores en P

obtenemos $\boxed{P=\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3},-3\right)}$, $\boxed{P=\left(\frac{11}{3},\frac{2}{3},3\right)}$

---

81) Calculamos un punto y el vector director de las dos rectas

$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}\Rightarrow\Rightarrow\vec{v}_r=(2,2,-2)$; $A_r=(1,2,0)$

$s\equiv\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}\Rightarrow\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,-2)$

a) <u>Método 1</u>.- Como $\pi\|r\Rightarrow\vec{v}_r\in\pi$, $\pi\|s\Rightarrow\vec{v}_s\in\pi$. Además el plano pasa por $A(2,3,4)$, luego:

Así $\pi:\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z-4 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\pi:3x-y+2z-11=0}$

<u>Método 2</u>.- Al ser las dos rectas paralelas al plano, su vector normal será perpendicular a las dos rectas.

Luego: $\overrightarrow{n_\pi}=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-3,1,-2)\Rightarrow\pi:-3x+y-2z+K=0$. Como $A(2,3,4)$ está en el

plano $-3\cdot2+3-2\cdot4+K=0\Rightarrow-11+K=0\Rightarrow K=11$. Sustituyendo: $\pi:-3x+y-2z+11=0$, es decir:

$\boxed{\pi:3x-y+2z-11=0}$

b) Sea t la recta pedida. Como $t\perp\pi\Rightarrow\vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(3,-1,2)$. Además $B(4,-1,2)\in t$, luego:

$\boxed{t\equiv\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2}}$

---

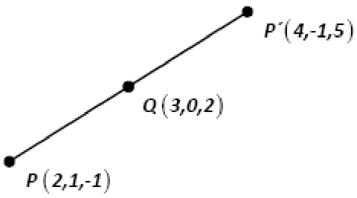
82) Sean los puntos $P=(2,1,-1)$ y $Q=(3,0,-2)$

a) Si P' es el simétrico de P respecto de Q, este punto Q es el punto medio de $\overline{PP'}$.

Así si llamamos $P'(a,b,c)$, se tendrá:

$$(3,0,2)=\left(\frac{a+2}{2},\frac{1+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\left\{\begin{array}{l}3=(a+2)/2\\0=(1+b)/2\\2=(-1+c)/2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=4\\b=-1\\c=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P'=(4,-1,5)}$$



b) Sea $P''(a,b,c)$ simétrico de P respecto de $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}\Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\y=1+\lambda\\z=\lambda\end{array}\right.$

Construimos plano α perpendicular a r , que pase por P , $\alpha\perp r\Rightarrow\vec{v}_r \,||\, \vec{n}_\alpha\Rightarrow\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$

$\Rightarrow\alpha: x+y+z+K=0$, si $P(2,1,-1)\in\alpha\Rightarrow 2+1-1+K=0\Rightarrow K=-2$.

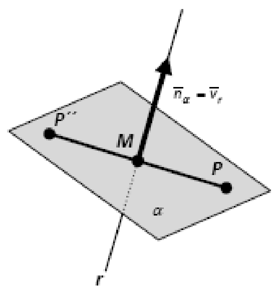
Luego $\Rightarrow\alpha: x+y+z-2=0$;

Sea $M=r\cap\pi\Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=0$.

Así: $M(1,1,0)$. Imponemos que sea M el punto medio de $\overline{PP''}$

$\left(\frac{2+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{c-1}{2}\right)=(1,1,0)$, igualando componentes:

$$\left\{\begin{array}{l}1=(2+a)/2\\1=(1+b)/2\\0=(c-1)/2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=1\\c=1\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{P''=(0,1,1)}$$



c) Sea $P'''(a,b,c)$ simétrico de P respecto de $\pi: x+y+z=3$

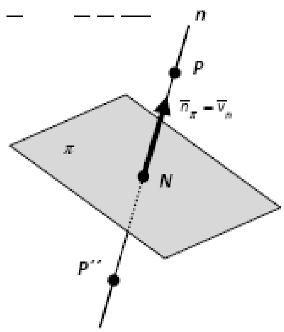
Construimos recta n perpendicular a π, $\vec{v}_n=(1,1,1)$, como $P\in n$, $n:\left\{\begin{array}{l}x=2+\mu\\y=1+\mu\\z=-1+\mu\end{array}\right.$

Si $N=\pi\cap n\Rightarrow 2+\mu+1+\mu-1+\mu=3\Rightarrow 3\mu=1\Rightarrow\mu=1/3$,

luego $N=\left(2+\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},-1+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$

Imponemos que N sea el punto medio de $\overline{PP'''}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{7}{3}=\frac{a+2}{2}\Rightarrow a=8/3\\\frac{4}{3}=\frac{b+1}{2}\Rightarrow b=5/3\\-\frac{2}{3}=\frac{c-1}{2}\Rightarrow c=-1/3\end{array}\right. \qquad \text{luego, } \boxed{P'''\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$



83) a) Calculamos un punto de cada recta y sus vectores directores

En $r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ llamamos $z=\mu \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-\mu=1 \\ y-\mu=-1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=-1+\mu \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow A_r(1,-1,0)$, $\vec{v}_r=(1,1,1)$

En $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=3 \end{cases}$ $A_s(1,0,3)$, $\vec{v}_s=(1,-1,0)$. Calculamos $\overrightarrow{A_rA_s}=(0,1,3)$ discutimos rangos:

$$rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = F_2-F_1 = rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = F_3 \leftrightarrow F_2 = rang\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \Rightarrow rang(M)=2 \neq rang(M^*)=3$$

las rectas se cruzan

b) Plano que contiene a P a y la recta r

Como $\overrightarrow{PA_r}=(2,-1,-2)$, $\pi_1 = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-4y+3z-5=0$

Plano π_2 que contiene a $P(-1,0,2)$ y a la recta s

Como $\overrightarrow{PA_s}=(2,0,1)$ $\pi_2 = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-y-2z+5=0$

La recta pedida será $\boxed{t \equiv \begin{cases} x-4y+3z-5=0 \\ x-y-2z+5=0 \end{cases}}$

c) Sea t la recta buscada. Calculamos $\vec{v}_t=\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0)$

- Plano π_1 que contiene a la recta r y a $\vec{v}_t$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x+y-2z=0$$

- Plano π_2 que contiene a la recta s y a $\vec{v}_t$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv z=3$$

- La recta pedida será $\boxed{t \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ z-3=0 \end{cases}}$

84) a) Se trata de hallar los puntos de corte de la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-2}{1}$ con la esfera de centro $C(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$. Esta esfera tendrá de ecuación: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$

Expresando la recta en paramétricas $r: \begin{cases} x = 4+2\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$, sustituyendo en la ecuación de la esfera:

$(4+2\lambda-1)^2 + (6+\lambda-2)^2 + (2+\lambda+1)^2 = (\sqrt{26})^2 = 26 \Rightarrow (3+2\lambda)^2 + (4+\lambda)^2 + (3+\lambda)^2 = 26 \Rightarrow$ Operando:

$3\lambda^2 + 13\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda = -1/3 \\ \lambda = -4 \end{array} \right.$ Sustituyendo en la ecuación paramétrica de la recta obtenemos dos puntos:

$Q_1 = \left(4 - \frac{2}{3}, 6 - \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right)$ y $Q_2 = (4-8, 6-4, 2-4)$. Es decir: $\boxed{Q_1\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)}$ y $\boxed{Q_2(-4,2,-2)}$

b) $Q(-2,1,0)$, $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$. La distancia de Q a r es: $d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}$, siendo $P \in r$

Tomemos $P(1,2,-3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-3,3,-3)$. A su vez: $\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-9,0,9)$

Con lo que $d = \frac{|(-9,0,9)|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{9}} \Rightarrow \boxed{d = 3\sqrt{2}}$

---

85) Calculamos un punto y el vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,3)$

Como $\pi: 2x - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (2,-1,1)$

a) El plano que pasa por *r* y es perpendicular a π tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$. Como además pasa por P, su ecuación será: $\pi = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y - z - 2 = 0}$

b) $ang(r,\pi) = sen\,(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi) = d = \frac{|2-2+3|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \boxed{\alpha = arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right)}$

---

86) a) Con los puntos A, B, C y D formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (-2,3,-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,-1,-2)$, $\overrightarrow{CD} = (4,-6,6)$ y $\overrightarrow{DA} = (0,-4,1)$. Observamos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos pues $\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$

Construimos las rectas $r_{AB}:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{-3}$ y $r_{CD}:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z+4}{6}$

$$d(r_{AB},r_{CD})=d(A,r_{CD})=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k\\ -4 & 2 & -5\\ 4 & -6 & 6\end{matrix}\right\|}{\sqrt{16+36+36}}=\frac{|(-18,4,16)|}{\sqrt{88}}=\frac{\sqrt{596}}{\sqrt{88}}=\boxed{\sqrt{\frac{149}{22}}}$$

b) Area (ABC) = $\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k\\ 2 & 3 & -3\\ -4 & 2 & -5\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\cdot|(-9,2,8)|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{81+4+64}=\boxed{\dfrac{\sqrt{149}}{2}}$

---

87) a) Como la esfera es tangente al plano π, este es plano tangente en el punto P'. Como PP' es un diámetro, $\overrightarrow{PP'}\perp\pi\Rightarrow\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{n_\pi}=(1,2,-2)$. Luego la recta por P y P' será: $r_{PP'}:\begin{cases} x=1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{cases}$

El punto $P'=r_{PP'}\cap\pi\Rightarrow$ sustituyendo $\Rightarrow 1+\lambda+2(2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+2=0\Rightarrow 9+9\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1$

Por último, sustituyendo en la ecuación de $r_{PP'}$: $\begin{cases} x=1-1=0\\ y=2-2=0\\ z=-1+2=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{P'(0,0,1)}$

b) Si PP' es un diámetro de la esfera, su punto medio será su centro C y el radio $r=d(P,C)$.

Luego, $C=\left(\dfrac{1+0}{2},\dfrac{2+0}{2},\dfrac{-1+1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$. El radio: $r=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+(1-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1+1}=$

$=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$. Con lo que la ecuación de la esfera será: $\boxed{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{9}{4}}$

---

88) Las rectas r_A, r_B y r_C es forma continua son:

$$r_A\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z-1}{2}\ ;\ r_B\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}\ ;\ r_C\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-2}$$

a) Los vectores $\overrightarrow{v_A}=(1,\lambda,2)$ y $\overrightarrow{v_B}=(1,1,1)$ no son paralelos, pues no existe λ cumpliendo: $\dfrac{1}{1}=\dfrac{\lambda}{1}=\dfrac{2}{1}$

Con lo que las rectas r_A y r_B o se cortan o se cruzan. Como no se pueden cruzar $\det(\overrightarrow{v_A},\overrightarrow{v_B},\overrightarrow{AB})=0$

Como $A(1,2,1)$ y $B(1,-2,3)$, $\overrightarrow{AB}=(0,-4,2)$, luego $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & -4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2-2\lambda=0\Rightarrow\boxed{\lambda=-1}$

b) Calculamos el plano π que pasa por r_B y r_C. El vector $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{v_A}\wedge\overrightarrow{v_B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-3,3,0)$.

Con lo que $\pi:-3x+3y+K=0$. Como $B\in\pi\Rightarrow -3-6+K=0\Rightarrow K=9$, luego $\pi:-3x+3y+9=0$, o lo que es igual $\pi: x-y-3=0$.

Si r_A es paralela a π, $\overrightarrow{v_A}\perp\overrightarrow{n_\pi}\Rightarrow(1,\lambda,2)\cdot(1,-1,0)=0\Rightarrow\lambda-1=0\Rightarrow\boxed{\lambda=1}$

c) $ang(r_B,r_C)=ang(\overrightarrow{v_B},\overrightarrow{v_C})=\alpha$. Así: $\cos\alpha=\dfrac{|(1,1,1)\cdot(1,1,-2)|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{|(1+1-2)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=0\Rightarrow\boxed{\alpha=90^\circ}$

---

89) a) Sea $P'(a,b,c)$ simétrico de $P(1,0,1)$ respecto de $\pi: x+5y-6z=1$.

Construimos una recta s perpendicular a π, que pase por P, $s\perp\pi\Rightarrow\vec{v}_s \,||\, \vec{n}_\pi\Rightarrow\vec{v}_s=(1,5,-6)$

Con lo que $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases}$. La recta r en paramétricas será: $r:\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}$, con $P_r=(0,0,0)$

Sea Q el punto de corte de la recta s con el plano π: $1+5\lambda+25\lambda-6(1-\lambda)=1\Rightarrow\lambda=\dfrac{3}{31}$.

Sustituyendo: $Q(1+\lambda,5\lambda,1-6\lambda)=\left(1+\dfrac{3}{31},\dfrac{15}{31},1-\dfrac{18}{31}\right)=\left(\dfrac{34}{31},\dfrac{15}{31},\dfrac{13}{31}\right)$

Imponemos por último que Q sea el punto medio de PP’: $\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c+1}{2}\right)=\left(\dfrac{34}{31},\dfrac{15}{31},\dfrac{13}{31}\right)$

Igualando componentes $\left\{\begin{array}{c} 34/35=(1+a)/2 \\ 15/31=b/2 \\ 13/31=(c+1)/2 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=17/31 \\ b=30/31 \\ c=-5/31 \end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{P'=\left(\dfrac{17}{31},\dfrac{30}{31},-\dfrac{5}{31}\right)}$

b) $d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{PP_r}\wedge\vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1}}=\dfrac{\|(-1,0,1)\|}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\boxed{d=\sqrt{2}}$

c) Calculamos los tres vértices del tetraedro que faltan:

- $A=OX\cap\pi=\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\cap\{x+5y-6z=1\}\Rightarrow\boxed{A=(1,0,0)}$
- $B=OY\cap\pi=\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\cap\{x+5y-6z=1\}\Rightarrow y=1/5\Rightarrow\boxed{B=(0,1/5,0)}$
- $C=OZ\cap\pi=\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\cap\{x+5y-6z=1\}\Rightarrow z=-1/6\Rightarrow\boxed{C=(0,0,-1/6)}$

$$Vol = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1/5 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1/6\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & -1/6\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{180}}$$

----

90) Sean el plano $\pi: 2x - y - 2 = 0$ y la recta $r:\begin{cases} x=1\\ y-2z=2\end{cases}$

a) Expresando la recta r en paramétricas: $r:\begin{cases} x=1\\ y=2+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$. Sustituimos coordenadas de un punto genérico de r en el plano $2\cdot 1-(2+2\lambda)-2=0 \Rightarrow \lambda=1$, solución única, luego la recta y el plano se cortan en un punto (P(1,0,-1))

b) Sea π' el plano pedido. Como $\vec{v}_r \subset \pi'$, $\pi \perp \pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi \| \pi'$, y además $P_r(1,0,2) \in \pi'$

La ecuación del plano π' será: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2\\ y-2 & 2 & -1\\ z & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' = x+2y-4z-5=0}$

c) Sea s la recta pedida y $P_r(1,2+2\lambda,\lambda)$ el punto de corte con la recta r. Como $A\in s \Rightarrow \overrightarrow{AP_r} \subset s \Rightarrow$ como la recta s es paralela al plano π, $\overrightarrow{AP_r} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \overrightarrow{AP_r}\cdot\vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (3,1+2\lambda,\lambda)\cdot(2,-1,0)=0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$

Tomando $\overrightarrow{AP_r}$ como vector director de la recta s, $\overrightarrow{AP_r} = \vec{v}_s = \left(3,1+2\cdot\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \left(3,6,\frac{5}{2}\right)$

Como $A(-2,1,0)\in s \Rightarrow \boxed{s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{5/2}}$

---

91) Sean los puntos A(2,0,-2), B(3,-4,-1), C(5,4,-3) y D(0,1,4)

a) Formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$

Área Triángulo ABC $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot|(0,4,16)| = \boxed{2\sqrt{17}}$

b) Formamos el vector $\overrightarrow{AD} = (-2,1,6)$

Volumen tetraedro ABCD $\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 100 = \boxed{\frac{50}{3}}$

---

92) Sean los planos $\pi_1: 2x+z-1=0$, $\pi_2: x+z+2=0$, $\pi_3: x+3y+2z-3=0$

a) El vector director de la recta formada por π_1 y π_2 será $\vec{v}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$

Para hallar un punto común a los dos planos $\left\{ \begin{matrix} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{matrix} \right\}$ restando las dos ecuaciones

$x - 3 = 0 = 0 \Rightarrow x = 3$. sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones $z = -5$. Luego podemos

tomar el punto (3,0,-5). La recta en paramétricas será: $\boxed{r: \begin{cases} x = 3 \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases}}$

b) $\vec{v}_r = (0,-1,0), \vec{n}_3 = (1,3,2)$, luego $sen\,(r,\pi_3) = \dfrac{|(0,-1,0)\cdot(1,3,2)|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 53^{\circ}}$

---

93) Sea la recta $s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$

a) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en el plano, $2(1-2t) - (2-2t) + 2(1+t) + 3 = 2 \neq 0$

con lo que la recta no corta al plano, luego la recta u el plano **son paralelos.**

También: $\vec{v}_r = (-2,-2,1), \vec{n} = (2,-1,2) \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \Rightarrow r \,|\,|\, \pi$

b) $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) =$ tomando el punto (1,2,1) de r $= \dfrac{|2\cdot1 - 2 + 2\cdot1 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{\dfrac{5}{3}}$

c) Sea $P'(a,b,c)$ simétrico de $P(3,2,1)$ respecto de $\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$

Construimos una recta s perpendicular a π , que pase por P , $s \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_s \,|\,|\, \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s = (2,-1,2)$

Con lo que en paramétricas $s: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$. Sea Q el punto de corte de la recta s con π

Sustituyendo en el plano $2(3+2\lambda) - (2-\lambda) + 2(1+2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

Con lo que $Q(3-2, 2+1, 1-2) = (1,3,-1)$

Imponemos por último que Q sea el punto medio de PP': $\left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+2}{2}, \dfrac{c+1}{2}\right) = (1,3,-1)$

Igualando componentes $\left\{ \begin{matrix} 1 = (a+3)/2 \\ 3 = (b+2)/2 \\ -1 = (c+1)/2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{P' = (-1,4,-3)}$

---

94) a) Volumen paralelepípedo: $V=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=\left\|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -5\end{matrix}\right\|=\left|-6-2\lambda\right|=6\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}-6-2\lambda=-6\\ -6-2\lambda=-6\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow$ $\boxed{\lambda=0,\lambda=-6}$

b) Sea r la recta pedida. Como está incluida en el plano $\pi: z=0,\ \vec{v}_r\perp\vec{n}_\pi=(0,0,1)$. Como tiene dirección perpendicular a $\vec{u}=(2,-1,4)$, $\vec{v}_r\perp\vec{u}$, luego $\vec{v}_r=\vec{n}_\pi\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=(1,2,0)$

Por último como r pasa por $(1,1,0)$, $\boxed{r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}}$

---

95) Los plano paralelos a $\pi\equiv x-2y+2z+1=0$ serán de la forma, $\alpha\equiv x-2y+2z+D=0$

La esfera $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$, tiene de radio $r=3$ y de centro $C(1,1,2)$

Si los planos tienen que ser tangentes a la esfera $d(C,\alpha)=3\Rightarrow\frac{\left|1-2+4+D\right|}{\sqrt{1+4+4}}=3\Rightarrow\left|3+D\right|=9\Rightarrow$

$\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}3+D=9\Rightarrow D=6\\ 3+D=-9\Rightarrow D=-12\end{matrix}\right.$, luego los planos serán: $\boxed{x-2y+2z+6=0}$ y $\boxed{x-2y+2z-12=0}$

---

96) a) El punto medio de $OP(-4,6,6)$ es $M(-2,3,3)$

Sea π plano perpendicular a OP que pasa por M, entonces $\vec{n}_\pi=(-4,6,6)$, luego $\pi\equiv-4x+6y+6z+D=0$.

Como pasa $M(-2,3,3)$, $-4\cdot(-2)+6\cdot3+6\cdot3+D=0\Rightarrow8+18+18+D=0\Rightarrow D=-44$, con lo que

$\pi\equiv-4x+6y+6z-44=0\Rightarrow\pi\equiv2x-3y-3z+22=0$

El punto Q pedido es la intersección de $r\equiv\begin{cases}x=-4+4\lambda\\ y=8+3\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}$ con el plano π hallado.

Sustituyendo en el plano $\Rightarrow2(-4+4\lambda)-3(8+3\lambda)-3(-2\lambda)+22=0\Rightarrow\lambda=2$, luego $Q(-4+8,8+6,-4)$

es decir, $\boxed{Q(4,14,-4)}$

b) $d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PA_r}\wedge\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 0 & 2 & -6\\ 4 & 3 & -2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{16+9+4}}=\frac{\left\|(14,-24,-8)\right\|}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{836}}{\sqrt{29}}=\boxed{\frac{2\sqrt{6061}}{29}}$

c) Un punto R genérico de r sería $R(-4+4\lambda,8+3\lambda,-2\lambda)$. Si O, P y R estuviesen alineados, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{PR}$ serían paralelos, luego $\overrightarrow{OP}=(-4,6,6)$ y $\overrightarrow{PR}=(4\lambda,2+3\lambda,-2\lambda-6)$ proporcionales. Es decir,

$$\frac{-4}{4\lambda}=\frac{6}{3\lambda+2}=\frac{6}{-2\lambda-6}\Rightarrow$$ Tomando dos de las igualdades:

$$\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-4}{4\lambda}=\dfrac{6}{3\lambda+2}\\[2ex]\dfrac{6}{3\lambda+2}=\dfrac{6}{-2\lambda-6}\end{array}\right\rangle\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}-4(3\lambda+2)=24\lambda\\3\lambda+2=-2\lambda-6\end{array}\right\rangle\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}-36\lambda=8\\5\lambda=-6\end{array}\right\rangle\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\lambda=-2/9\\\lambda=-6/5\end{array}\right\rangle$$ distintos, luego no existe R

---

97) a) En paramétricas las rectas son: $r\equiv\begin{cases}x=2+t\\y=-1+\lambda t\\z=-2t\end{cases}$, $s\equiv\begin{cases}x=1+2\mu\\y=4\mu\\z=-1+2\mu\end{cases}$.

Sus vectores directores son: $\vec{v}_r=(1,\lambda,-2)$, $\vec{v}_s=(2,4,2)$, no son paralelos, luego r y s se cruzan

Como $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,-1)$, $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s\right|}=\dfrac{\left\|\begin{matrix}-1&1&-1\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}i&j&k\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{matrix}\right\|}=\dfrac{18}{|(2\lambda+8,-6,4-2\lambda)|}=$

$=\dfrac{18}{\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(4-2\lambda)^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}$. Como $d(r,s)=\dfrac{9}{\sqrt{59}}$, se tendrá:

$$\frac{18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}=\frac{9}{\sqrt{59}}\Rightarrow 2\sqrt{59}=\sqrt{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}\Rightarrow 236=8\lambda^2+16\lambda+116\Rightarrow 8\lambda^2+16\lambda-120=0$$

Resolviendo: $\lambda=-5,\lambda=3$, como solo interesa el valor positivo: $\boxed{\lambda=3}$

b) $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,-1)$, $\vec{v}_r=(1,\lambda,-2)$. si han de ser perpendiculares: $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=0\Rightarrow(-1,1,-1)\cdot(1,\lambda,-2)=0\Rightarrow$

$-1+\lambda+2=0\Rightarrow\boxed{\lambda=-1}$

---

98) Sean los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos: $\pi_1\equiv x-z=0,\quad \pi_2\equiv my-6z=0,\quad \pi_3\equiv x+y-mz=0,$

a) Si los planos se han de cortar en una recta $\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2},\vec{n}_{\pi_3}$ han de ser linealmente dependientes, es decir

$rang\left(\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2},\vec{n}_{\pi_3}\right)<3\Rightarrow\left|\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2},\vec{n}_{\pi_3}\right|=0$. Como $\vec{n}_{\pi_1}=(1,0,-1),\vec{n}_{\pi_2}=(0,m,-6),\vec{n}_{\pi_3}=(1,1,-m)$

sustituyendo: $\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&m&-6\\1&1&-m\end{vmatrix}=0\Rightarrow -m^2+m+6=0\Rightarrow\boxed{m=-2}$ y $\boxed{m=3}$

b) Si $m=3$, sea π el plano pedido, $\vec{n}_\pi=\vec{n}_{\pi_1}\wedge\vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&-1\\0&3&-6\end{vmatrix}=(3,6,3)$.

Luego $\pi \equiv 3x+6y+3z+D=0,$ como además el plano pasa por el punto $P(-1,-1,1)$, sustituyendo:

$-3-6+3+D=0 \Rightarrow D=6$, luego $\pi \equiv 3x+6y+3z+6=0$ o $\boxed{\pi \equiv x+2y+z+2=0}$

c) Sea $P'(a,b,c)$ simétrico de P respecto al plano $\pi_1 \equiv x-z=0$

Construimos una recta s perpendicular a π_1, que pase por P, $s \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_s \| \vec{n}_{\pi_1} \Rightarrow \vec{v}_s = (1,0,-1)$

Con lo que en paramétricas $s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-1 \\ z=1-\lambda \end{cases}$. Sea Q el punto de corte de la recta s con π_1

Sustituyendo en el plano $-1+\lambda-(1-\lambda)=0 \Rightarrow -2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1$. Con lo que el punto $Q(-1+1,-1,1-1)=(0,-1,0)$

Imponemos por último que Q sea el punto medio de PP': $\left(\frac{a-1}{2},\frac{b-1}{2},\frac{c+1}{2}\right)=(0,-1,0)$

Igualando componentes $\left\{\begin{array}{c} 0=(a-1)/2 \\ -1=(b-1)/2 \\ 0=(c+1)/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'=(1,-1,-1)}$

Así: $d(Q,P')=\sqrt{(1-1)^2+(-1-0)^2+(-1-2)^2} \Rightarrow \boxed{d=\sqrt{10}}$